

**Universidade Federal de Ouro Preto**

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

Programa de Pós-Graduação em Ciências:  
Física de Materiais (FIMAT)

---

Dissertação

---

# **Polítropa Quântica Anisotrópica**

*Nadson de Jesus da Silva Trindade*

Ouro Preto  
2023



**UFOP**



**fimat**

Programa de Pós-graduação em Ciências  
Física de Materiais  
Universidade Federal de Ouro Preto



**UFOP**  
Universidade Federal  
de Ouro Preto

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**NADSON DE JESUS DA SILVA TRINDADE**

**POLÍTROPA QUÂNTICA ANISOTRÓPICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**OURO PRETO, MG**  
**30 DE MAIO DE 2023**

NADSON DE JESUS DA SILVA TRINDADE

## **POLÍTROPA QUÂNTICA ANISOTRÓPICA**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Ciências - Física de Materiais (FIMAT) do Departamento de Física da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências.*

Orientador:

*Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten*

OURO PRETO, MG

30 DE MAIO DE 2023

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

T832p Trindade, Nadson de Jesus da Silva.  
Polítropa quântica anisotrópica. [manuscrito] / Nadson de Jesus da  
Silva Trindade. - 2023.  
57 f.: il.: gráf..

Orientador: Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten.  
Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro  
Preto. Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação em Ciências.  
Área de Concentração: Física de Materiais.

1. Polítropas. 2. Quântica. 3. Anisotropia. I. Velten, Hermano Endlich  
Schneider. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 501:620

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
REITORIA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS/FÍSICA  
DE MATERIAIS



### FOLHA DE APROVAÇÃO

**Nadson de Jesus da Silva Trindade**

**Polítropa Quântica Anisotrópica**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ciências da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências

Aprovada em 14 de março de 2023.

Membros da banca

Dr. Hermano Endlich Schneider Velten - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)

Dr. Ronaldo Júnio Campos Batista - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Dr. Júlio César Fabris - (Universidade Federal do Espírito Santo)

Hermano Endlich Schneider Velten, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 29/05/2023.



Documento assinado eletronicamente por **Mariana Cristina Moreira Souza, ASSISTENTE EM ADMINISTRACAO**, em 29/05/2023, às 13:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Hermano Endlich Schneider Velten, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 29/05/2023, às 14:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0532859** e o código CRC **6B410509**.

# Agradecimentos

Gostaria antes de tudo, agradecer a Deus, pela oportunidade maravilhosa. Também estou grato por todos os meus familiares e amigos que sempre estiveram por perto para apoiar ou questionar minhas decisões. Agradeço ao FIMAT da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) e a agência de fomento que financiou este trabalho (PROPPI-UFOP), que me garantiu essa oportunidade de obtenção do título de Mestre e também agradeço ao meu Orientador Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten por essa jornada em que ele foi parte importante. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Nossas posturas, nossa presunção imaginada, a ilusão de que temos alguma posição privilegiada no Universo, são desafiadas por este ponto de luz pálida (Planeta Terra avistado pela sonda Voyager 1). Nosso planeta é um grão solitário na imensa escuridão cósmica que nos cerca.*

—CARL SAGAN

# Resumo

A mecânica quântica de De Broglie-Bohm pode estabelecer uma conexão entre a Mecânica Quântica não-relativística com o movimento de partículas em Dinâmica dos Fluidos. De fato, essa interpretação mostra que um sistema quântico pode ser decomposto em um sistema hidrodinâmico, submetido a um potencial adicional, de origem quântica. Neste tipo de sistema podemos observar possíveis manifestações de fenômenos quânticos em objetos macroscópicos. Sabemos que para um fluido que obedece ao princípio de Pascal (tensões principais iguais), a pressão é tida como isotrópica. No entanto, conhecemos objetos com desvio de isotropia local como, por exemplo, Polítropas Anisotrópicas. Polítropas são configurações em equilíbrio hidrostático como, por exemplo, estrelas ideais. Podemos considerar uma grande diversidade de eventos físicos que dão origem a configurações anisotrópicas. Um possível grau de anisotropia em um sistema pode acontecer tanto em regimes de baixa ou alta densidade. A anisotropia pode provocar certas instabilidades em estruturas astrofísicas. Neste trabalho estudamos as propriedades físicas de um objeto que denominamos *Polítropa Quântica Anisotrópica*.

**Palavras-chave:** Polítropas, Quântica, Anisotropia

# Abstract

De Broglie-Bohm's quantum mechanics establishes a connection between non-relativistic Quantum Mechanics with the movement of particles in Fluid Dynamics. In fact, this interpretation shows that a quantum system can be decomposed into an astrophysical hydrodynamic system, subjected to an additional potential, of quantum origin. In this type of system we can observe possible manifestations of quantum phenomena in macroscopic objects. We know that for a fluid that obeys Pascal's principle (equal principal stresses), the pressure is considered isotropic. However, we know objects with local isotropy deviation, such as Anisotropic Polytropes. Polytropes are configurations in hydrostatic equilibrium, such as ideal stars. We can consider a great diversity of physical events that give rise to anisotropic configurations. A possible degree of anisotropy in a system can happen in both low-density and high-density regimes. Anisotropy can cause certain instabilities in astrophysical structures. In this work we study the physical properties of the object that we call *Anisotropic Quantum Polytrope*.

**Keywords:** Polytropes, Quantum, Anisotropy

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>4</b>
<b>Resumo</b>	<b>6</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>1 INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>2 METODOLOGIA</b>	<b>13</b>
<b>3 Mecânica Quântica de De Broglie-Bohm (MQBB)</b>	<b>14</b>
3.1 Introdução a formulação MQBB . . . . .	14
3.2 MQBB para Sistemas Físicos Conservativos . . . . .	14
3.3 Potencial Quântico de Bohm . . . . .	17
<b>4 Sistema Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP)</b>	<b>19</b>
4.1 Introdução ao sistema Gross-Pitaevskii (GP) . . . . .	19
4.2 Transformação de Madelung na equação GP . . . . .	19
4.3 A equação GP independente do tempo . . . . .	21
4.4 Equilíbrio Hidrostático . . . . .	21
4.5 Polítropa Quântica . . . . .	23
<b>5 Anisotropia em um Sistema Físico</b>	<b>27</b>
5.1 Os critérios de Jeans para a anisotropia de matéria . . . . .	30
5.1.1 Teorema Virial . . . . .	30
5.1.2 Massa de Jeans Isotrópica . . . . .	31
5.1.3 Massa de Jeans Anisotrópica . . . . .	33
5.1.4 Sobre a possível origem da anisotropia . . . . .	34
5.1.5 Algumas considerações . . . . .	35
<b>6 Polítropa Anisotrópica</b>	<b>36</b>
6.1 Ansatz para Polítropa Anisotrópica . . . . .	38
<b>7 Polítropa Quântica Anisotrópica</b>	<b>41</b>
7.1 Modelando o objeto: <i>Polítropa Quântica Anisotrópica</i> . . . . .	42

CONTEÚDO

9

**Referências Bibliográficas**

**51**

# INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

A teoria quântica possui um sucesso preditivo quase que insuperável, desde sua criação há cerca de 100 anos. Há, no entanto, um problema persistente com sua interpretação convencional, relacionado ao problema da medição [1]. O problema surge da seguinte forma. A teoria quântica foi desenvolvida para explicar o comportamento de sistemas “microscópicos”. Essa teoria associa, a cada sistema microscópico, uma função de onda  $\Psi$ . De acordo com a interpretação convencional da teoria, essa função de onda fornece a especificação mais completa do sistema microscópico. Além disso, a dinâmica da função de onda  $\Psi$  é regida por duas leis diferentes. Primeiro, há uma evolução dinâmica segundo a equação de Schrodinger, que é determinística, no seguinte sentido: dada a função de onda inicial, pode-se determinar a função de onda em um momento posterior [2]. Existe também outro tipo de evolução da função de onda, que é o colapso da função de onda. A regra do colapso é introduzida na teoria quântica para explicar o resultado obtido quando uma medição é realizada. A esse respeito, diz-se que o colapso da função de onda ocorre quando uma medição é realizada por um observador macroscópico (humano ou não), no sistema microscópico descrito por essa função de onda. O resultado é uma substituição de  $\Psi$  por outra função de onda que a partir desse momento fornece a descrição (completa) do sistema microscópico.

Consideradas separadamente, ambas as leis da evolução dinâmica são definidas de forma inequívoca. A ambiguidade torna-se mais marcante no exemplo a seguir. Quando um observador macroscópico realiza uma medição em um sistema microscópico, a lei do colapso deve ser aplicada. Mas se o sistema macroscópico for considerado um conjunto de sistemas microscópicos, então a função de onda do sistema total, que consiste no observador e no sistema sob observação, deve evoluir no tempo conforme a equação de Schrodinger e a lei do colapso não deve ser invocada [1]. Em situações práticas, a diferença entre o “observador macroscópico” e o “sistema microscópico” é suficiente para que se possa frequentemente dizer se o colapso ocorreu ou não. Não obstante, a distinção ambígua entre o observador macroscópico e o sistema microscópico apresenta uma óbvia falha lógica que é inconsistente se quisermos considerar a teoria quântica como uma teoria fundamental que descreve a natureza. Porque a distinção ambígua é necessária para a lei do colapso, e porque a lei do colapso é invocada para descrever o processo de medição, o problema é geralmente referido como o problema de medição.

Uma possível solução para o problema de medição reside na visão de que a especificação

completa de um sistema microscópico não é fornecida apenas pela função de onda, mas também por algumas variáveis extras <sup>1</sup> [3]. Essas variáveis extras devem ter uma existência objetiva, independentemente do fato de uma medição ser ou não realizada. Elas também devem determinar o resultado em experimentos, de modo que a lei do colapso se torne desnecessária [4]. Não há, portanto, necessidade de distinção entre sistemas microscópicos e macroscópicos; ambos são descritos por essas variáveis extras juntamente com a função de onda. Uma teoria na qual o sistema é descrito por tais variáveis adicionais é chamada de Teoria Realista.

Outra abordagem alternativa pode ser considerada, e essa é a que iremos tratar nesse trabalho, a chamada Mecânica Quântica de De Broglie-Bohm (MQBB). Dentro do contexto da MQBB podemos apresentar a Formulação Causal da Mecânica Quântica para sistemas físicos. A teoria propõe que, além da função de onda, existe uma "onda piloto" orientadora que determina o comportamento das partículas quânticas. De acordo com a teoria de Broglie-Bohm, as partículas têm posições e trajetórias bem definidas, ao contrário da interpretação de Copenhague da mecânica quântica, onde as partículas são descritas apenas por uma função de onda que fornece probabilidades de seus estados [5]. Nesta teoria, a função de onda evolui de acordo com a equação de Schrodinger, mas as próprias partículas são guiadas pela onda piloto. A onda piloto interage com as partículas, determinando suas posições e velocidades. O comportamento das partículas na teoria de Broglie-Bohm é consistente com as previsões da mecânica quântica padrão, incluindo a natureza probabilística das medições. No entanto, fornece uma descrição mais completa e determinística de partículas individuais [5].

A partir dessa formulação iremos estabelecer uma conexão entre a mecânica quântica não-relativística com o movimento de partículas, assim como na Dinâmica dos Fluidos.

Esse foi um trabalho realizado inicialmente pelos físicos Erwin Madelung [6] e Louis de Broglie e posteriormente pelo físico David Bohm [7]. Efetivamente, esta análise, conhecida como mecânica Bohmiana, mostra que um sistema quântico (descrito pela equação de Schrodinger) pode ser decomposto em um sistema hidrodinâmico, submetido a um potencial adicional, de origem quântica.

A MQBB tem sido aplicada não apenas em sistemas quânticos, mas também, por exemplo, em sistemas hidrodinâmicos astrofísicos [8]. O objetivo desta abordagem é verificar, de uma maneira efetiva, a possível manifestação de fenômenos quânticos em sistemas macroscópicos. Inicialmente, esta aplicação da MQBB à astrofísica é motivada pelo desconhecimento da natureza da matéria escura, uma componente que deve perfazer cerca de 25% da composição atual do universo. Sistemas estelares também têm sido estudados por meio desta abordagem, visando descrever objetos compactos formados como estrelas de bósons, por exemplo [9].

Dentre as várias aplicações hidrodinâmicas, resultante da MQBB, um objeto analisado na

---

<sup>1</sup>Refere-se a quantidades hipotéticas que, se existissem, forneceriam uma descrição mais completa dos sistemas físicos do que a fornecida atualmente pela mecânica quântica padrão.

literatura é a *Polítropa<sup>2</sup> Quântica*. Trata-se de uma configuração em equilíbrio hidrostático onde o potencial quântico equilibra uma atração do tipo gravitacional [10].

Devemos notar que, como os sistemas físicos estudados nesta abordagem envolvem a noção de fluido, é usual assumir que este satisfaça ao princípio de Pascal (tensões principais iguais). Portanto, a pressão é tida como isotrópica (não depende da direção), assim como é geralmente aplicado para o caso de equilíbrio hidrostático de uma estrela. Em uma primeira aproximação, estrelas são objetos esfericamente simétricos de massa inicial  $M_0$  e raio  $R_0$ , que se encontra em equilíbrio hidrostático (pressão radial é compensada pela força gravitacional). Para estrelas esféricas em equilíbrio hidrostático, a equação de equilíbrio dinâmico, utilizando uma equação de estado politrópica, é conhecida como equação de Lane-Emden [11].

Sabemos que para descrever uma estrela próxima da realidade, devemos considerar um certo grau de anisotropia que pode ser causado por uma grande variedade de fenômenos físicos [12]. Como estrelas emitem radiação na forma de ondas eletromagnéticas, sua energia deve decrescer com o tempo [13]. Este pode ser um mecanismo que quebra a isotropia do sistema, mas não o único. Podemos contar com uma grande diversidade de eventos físicos que dão origem a anisotropia como a rotação e viscosidade. Esse desvio de isotropia local pode acontecer tanto em regimes de baixa densidade ou em alta densidade [14]. Em um sistema bastante denso, processos de transições de fase podem acontecer durante o colapso gravitacional [15]. Podemos notar as transições para um estado condensado de píons<sup>3</sup>, que suavizando a equação de estado e atribuindo uma enorme liberação de energia têm implicações importantes na evolução das configurações de colapso [16].

Neste trabalho adicionamos o termo de anisotropia ao objeto denotado *Polítropa Quântica*, estudado na Ref. [10]. Isto nos deu origem a um novo objeto físico: a *Polítropa Quântica Anisotrópica*.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Cap. III revisamos a mecânica quântica de De Broglie-Bohm. Aqui, partimos da equação de Schrodinger e obtemos um sistema composto pela Equação da Continuidade e a equação equivalente à Equação de Euler equipada com o potencial quântico.

No Cap. IV estudamos como acoplar a gravitação ao problema, o que nos forneceu o Sistema Gross-Pitaevskii-Poisson e introduzimos o conceito de *Polítropa Quântica*.

No Cap. V discutimos possíveis fontes de anisotropia em sistemas auto-gravitantes.

No Cap. VI tratamos da *Polítropa Anisotrópica*.

No Cap. VII construímos a *Polítropa Quântica Anisotrópica*. O comportamento do sistema modelado foi analisado.

---

<sup>2</sup>Polítropas são modelos matemáticos que descrevem a relação entre pressão e densidade.

<sup>3</sup>Um condensado de píons refere-se a um estado hipotético da matéria em que um grande número de píons, que são os mésons mais leves, ocupam um único estado quântico.

# METODOLOGIA

Trata-se de um trabalho teórico e computacional, que se baseia na revisão de artigos e reprodução de resultados pré-existentes na literatura. Inicialmente foi revisado a MQBB que, de certa forma, faz uma correspondência entre a equação de Schrodinger e a Dinâmica de Fluidos. Em seguida, reproduzimos parte de seu arcabouço matemático. Seguimos com a descrição de uma Polítropa compacta de configuração Anisotrópica. Foram reproduzidos os detalhes matemáticos da construção teórica deste objeto. Com todo esse aparato matemático, foi estabelecido uma relação entre a MQBB e a Polítropa Anisotrópica. Também tratamos de um objeto denotado de *Polítropa Quântica*. A partir destes resultados, criamos um objeto novo, que chamamos de *Polítropa Quântica Anisotrópica*. Por fim, modelamos essa configuração e observamos as propriedades físicas através de cálculos numéricos, modificando alguns de seus parâmetros.

# Mecânica Quântica de De Broglie-Bohm (MQBB)

## 3.1 Introdução a formulação MQBB

Podemos iniciar este trabalho apresentando a mecânica quântica de De Broglie-Bohm que também pode ser chamada de Formulação Causal da Mecânica Quântica para sistemas físicos sob a ação de um potencial geral  $\phi(x, t)$  [17]. Esta formulação faz conexão entre a mecânica quântica não-relativística com o movimento de partículas, como na Dinâmica Clássica dos Fluidos. Ainda, introduz o conceito de onda piloto [18], inicialmente apresentada pelo físico alemão Erwin Madelung em 1923, continuada pelo físico francês Louis de Broglie, ganhador do Prêmio Nobel de Física (PNF) em 1929. Logo em seguida este trabalho foi revisitado pelo físico estadunidense David Bohm, a partir de 1952.

Vamos partir da Equação de Schrodinger em sua versão usual e, logo em seguida, iremos aplicar a transformação de Madelung-Bohm, também conhecida como decomposição polar da função de onda. Como resultado, temos que a equação de Schrodinger é decomposta em uma parte real e outra imaginária com correspondência com as equações da dinâmica dos fluidos. A primeira, a parte imaginária, correspondendo à equação da continuidade e a segunda, a parte real, será equivalente à lei de conservação do momento linear quântico para esse sistema em questão [19]. Com essas informações podemos verificar a coerência ou descoerência de sua evolução. Podemos ver também se os sistemas são conservativos ou não-conservativos. Isso nos permite examinar, por exemplo, se tais sistemas são dissipativos [20].

## 3.2 MQBB para Sistemas Físicos Conservativos

Iniciaremos com a equação de Schrodinger (físico austríaco Erwin Shrodinger, que 1926 propôs essa equação para representar sistemas físicos quânticos) em sua versão linear unidimensional,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \phi(x, t) \Psi(x, t), \quad (3.1)$$

onde  $m$  é a massa da partícula,  $\hbar = h/2\pi$  é a constante de planck reduzida e  $\phi$  é o potencial.

Na interpretação quântica padrão, a função de onda é usada para calcular distribuições de probabilidade. Por exemplo, a densidade de probabilidade associada a uma detecção conjunta

das  $N$  partículas em um determinado instante  $t$ .

A função de onda  $\Psi(x, t)$  pode ser escrita a partir da transformação de Madelung-Bohm ou mais comumente conhecida como forma polar,

$$\Psi(x, t) = \psi(x, t)e^{iS(x, t)}, \quad (3.2)$$

em que  $S(x, t)$  é uma ação clássica e  $\psi(x, t)$  será definido ao avançarmos no problema. Calculando as derivadas temporais e espaciais, temos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = e^{iS} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\psi \frac{\partial S}{\partial t} \right) = \left( i \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Psi, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = e^{iS} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\psi \frac{\partial S}{\partial x} \right) = \left( i \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Psi. \quad (3.4)$$

Podemos derivar a Equação (3.4) em relação à variável  $x$  novamente, resultando,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( i \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Psi \right], \quad (3.5)$$

e, portanto, obtemos uma equação do tipo,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = ie^{iS} \frac{\partial S}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\psi \frac{\partial S}{\partial x} \right) + e^{iS} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + i\psi \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right). \quad (3.6)$$

Realizando a distributiva na equação acima,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^{iS} \left[ i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} - \psi \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] + e^{iS} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + i\psi \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right). \quad (3.7)$$

Observe que na Equação (3.7),  $e^{iS}$  é fator comum. Com isso, podemos reescrevê-la na forma,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^{iS} \left[ 2i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i\psi \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \psi \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (3.8)$$

Agora vamos dividir a Equação (3.8) por  $\psi$ ,

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^{iS} \left[ \frac{2i}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (3.9)$$

Podemos simplificar a equação acima e escrevê-la como,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Psi \left[ \frac{2i}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (3.10)$$

Agora vamos substituir as Equações (3.3) e (3.10) na expressão (3.1). Obteremos,

$$i\hbar \left( i \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{2i}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] \Psi + \phi \Psi. \quad (3.11)$$

Vamos relembrar da notação de Madelung onde  $\Psi$  está relacionado com  $e^{iS}$ , que é fator comum, então,

$$i\hbar \left( i \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{2i}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] \Psi + \phi \Psi. \quad (3.12)$$

Note que a equação acima é a mesma Equação (3.1) reescrita em sua forma polar. Iremos analisar cada um desses termos apresentados. Primeiramente, vamos separar a parte imaginária dessa equação. Temos,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \left( 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right). \quad (3.13)$$

Podemos fazer uma correlação entre a Equação (3.13) e equação tradicional da dinâmica dos fluidos, considerando  $|\Psi|^2 \rightarrow \psi^2 = \rho$  (densidade de massa). Desta forma,

$$\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \left( 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x} + \sqrt{\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right), \quad (3.14)$$

pode ser escrita na forma,

$$\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} \left( \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\sqrt{\rho}}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right). \quad (3.15)$$

Simplificando ainda mais a equação acima,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right). \quad (3.16)$$

Vamos agora fazer a seguinte relação,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \quad (3.17)$$

observe que a derivada parcial da Equação (3.17) é exatamente o mesmo termo dentro dos parênteses da Equação (3.16). É imediato verificar que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right). \quad (3.18)$$

Aparentemente, a Equação (3.18) não possui qualquer relação com a dinâmica dos fluidos, mas isso não é verdade. Para que possamos fazer essa relação devemos realizar a seguinte correspondência,

$$\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \rightarrow v_{qu}.$$

Vamos denominar  $v_{qu}$  de velocidade quântica. Isto nos fornece a seguinte expressão,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_{qu}) = 0, \quad (3.19)$$

que também podemos escrevê-la na forma,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_{qu} + \rho \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} = 0. \quad (3.20)$$

Chegamos na expressão (3.20) que pode ser associada à equação da Continuidade ou, como costumamos chamar na física, lei de conservação da dinâmica dos fluidos [8]. Ela expressa a conservação da distribuição de probabilidade  $\int |\Psi|^2 dx$ . A partir desta equação verifica-se também a coerência desse sistema físico representado pela equação de Schrodinger.

### 3.3 Potencial Quântico de Bohm

Tratamos na Equação (3.12) a parte imaginária da decomposição polar da equação de Schrodinger. Agora, vamos fazer o mesmo para parte real dessa expressão. Com isso,

$$-\hbar \psi \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] + \phi \psi. \quad (3.21)$$

Podemos dividir toda a equação acima por  $m\psi$ , então,

$$-\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{1}{\psi} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\phi}{m}. \quad (3.22)$$

Agora, vamos fazer a distributiva,

$$-\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\phi}{m}, \quad (3.23)$$

o que nos permite simplificar ainda mais a Equação (3.23). Assim,

$$-\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{m} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \phi \right). \quad (3.24)$$

Aqui iremos fazer mais uma correspondência, e devemos lembrar que  $\psi = \sqrt{\rho}$ . Sendo assim,

$$\phi_{qu}(x, t) \equiv \phi_{qu} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}. \quad (3.25)$$

Nós chamaremos  $\phi_{qu}$  de potencial quântico de Bohm ou pressão quântica que é o conceito central da formulação de Broglie-Bohm. Isso mostra que mesmo uma partícula classicamente livre pode sofrer a ação de forças decorrentes do potencial quântico, mas note que ele desaparece no limite  $\hbar \rightarrow 0$ .

Agora que conhecemos os dois potenciais (geral e quântico), podemos então considerar a equação,

$$-\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{m} (-\phi_{qu} - \phi). \quad (3.26)$$

Observe que é a mesma Equação (3.24). Vamos multiplicar (3.26) por  $m$ ,

$$-\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{m \hbar^2}{2 m^2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \phi_{qu} + \phi. \quad (3.27)$$

Agora, podemos acrescentar o termo  $v_{qu}$  e colocar toda a expressão em apenas um lado da igualdade,

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{m}{2} v_{qu}^2 + \phi_{qu} + \phi = 0. \quad (3.28)$$

O próximo passo é derivar uma vez a Equação (3.28) em relação à variável  $x$  e multiplicar o resultado por  $1/m$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} v_{qu}^2 \right) + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_{qu} + \phi) = 0. \quad (3.29)$$

Note que no primeiro termo existem duas derivadas, uma em  $x$  e a outra em  $t$ . Fazendo a permutação entre essas duas derivadas teremos um termo já bem conhecido na literatura, dado por,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} v_{qu}^2 \right) + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_{qu} + \phi) = 0, \quad (3.30)$$

ou

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} v_{qu}^2 \right) + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_{qu} + \phi) = 0. \quad (3.31)$$

Escrevendo em sua forma mais compacta, a Equação (3.31) pode ser reescrita como,

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_{ef}) = 0, \quad (3.32)$$

onde  $\phi_{ef}$  é o potencial efetivo que é a soma dos potenciais (geral e quântico). Note que chegamos em uma equação que é análoga à Equação de Euler para dinâmica de fluidos ideais com um termo de potencial novo [21]. Esse é o termo mais importante para esse sistema.

# Sistema Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP)

Neste capítulo iremos revisar a estrutura matemática do sistema de equações composto pela equação de Gross-Pitaevskii (também conhecida como equação de Schrodinger não-linear), e pela equação de Poisson. Estas equações pretendem descrever, por exemplo, sistemas auto-gravitantes sujeitos a possíveis manifestações de origem quântica.

## 4.1 Introdução ao sistema Gross-Pitaevskii (GP)

O Sistema GP, também conhecido como equação cúbica não linear de Schrodinger, foi estudado pela primeira vez no início dos anos 60 e é, atualmente, um modelo amplamente utilizado em diferentes assuntos, tais como, mecânica quântica, física da matéria condensada, óptica não linear etc [22]. A equação de Gross-Pitaevskii tem recebido uma notável atenção devido ao seu sucesso em prever resultados experimentais em Condensados de Bose-Einstein (BEC) [23] e [24].

Se considerarmos o limite em que a temperatura  $T \rightarrow 0$ , todos os bósons se condensam em um único estado quântico (BEC), onde este sistema de muitos corpos pode ser descrito por uma função de onda  $\Psi$ , que obedece à equação,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r,t) + \phi(r,t) \Psi(r,t) + \beta |\Psi(r,t)|^2 \Psi(r,t), \quad (4.1)$$

$\beta$  representa as interações entre as partículas do BEC e  $\Psi$  é a função de onda dependente do tempo para equação de GP. Esta equação fornece,

$$E \bar{\Psi}(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \bar{\Psi}(r) + \phi(r) \bar{\Psi}(r) + \beta |\bar{\Psi}(r)|^2 \bar{\Psi}(r), \quad (4.2)$$

onde  $\bar{\Psi}$  é a função de onda independente do tempo e  $E$  é a energia.

## 4.2 Transformação de Madelung na equação GP

O BEC autogravitante newtoniano é descrito pelo sistema Gross-Pitaevskii-Poisson [25],

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + m(\phi + gN_s m|\Psi|^2)\Psi, \quad (4.3)$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi GN_s m|\Psi|^2, \quad (4.4)$$

com  $g = 4\pi a_s \hbar^2 / m^3$  onde  $a_s$  é o comprimento de dispersão (permitimos que  $a_s$  seja positivo ou negativo) [26] e  $N_s$  é o número de partículas. Escrevemos a função de onda na forma polar  $\Psi(r,t) = \psi(r,t)e^{iS(r,t)/\hbar}$  onde  $\psi$  e  $S$  são reais. Assim como já introduzido no capítulo anterior, a transformação de Madelung nos permite fazer a seguinte associação [6],

$$\rho = N_s m |\Psi|^2 = N_s m \psi^2, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{m} \nabla S. \quad (4.5)$$

O quadrado da função de onda  $|\Psi|^2$  pode ser identificado como a densidade do número de bósons,  $\rho(r,t)$  é o campo de densidade e  $\mathbf{v}(r,t)$  o campo de velocidade. A massa total da configuração é  $M = N_s m = \int \rho dr$ . O campo de velocidades é irrotacional, pois  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ . Com esta transformação, pode-se mostrar que a equação de Gross-Pitaevskii (4.3) é equivalente às equações barotrópicas de Euler com um termo adicional chamado potencial quântico. De fato, obtém-se o conjunto de equações,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (4.6)$$

sendo essa é a equação da continuidade com o termo de velocidade e a equação de Euler,

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\phi - \frac{1}{m}\nabla\phi_{qu}. \quad (4.7)$$

Note que essas equações já são conhecidas, pois foram obtidas da mesma forma que as equações (3.19) e (3.32) respectivamente, agora a Equação (4.7) apresenta um termo novo associado a pressão que é dado pela seguinte expressão,

$$P = \frac{2\pi a_s \hbar^2}{m^3} \rho^2. \quad (4.8)$$

A relação de pressão (4.8) corresponde a uma equação de estado politrópica na forma,

$$P = K\rho^\gamma, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}, \quad (4.9)$$

com índice politrópico  $n = 1$  ( $\gamma = 2$ ) e constante politrópica  $K = 2\pi a_s \hbar^2 / m^3$ . Podemos chamar  $P$  de pressão quântica do BEC. Observe que se  $n \rightarrow 0$ , então a pressão  $P$  vai para o infinito  $\infty$  (uma possível singularidade) [27].

### 4.3 A equação GP independente do tempo

O sistema GPP independente do tempo é bem-parecido com o caso mais geral (dependente do tempo), para isso devemos seguir os mesmos passos do capítulo anterior. A função de onda é dada por,

$$\Psi(r,t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}. \quad (4.10)$$

Obtemos a equação GP independente do tempo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + m(\phi + gN_s m|\psi|^2)\psi = E\psi, \quad (4.11)$$

onde  $\psi \equiv \psi(r)$  é real e  $\rho(r) = N_s m \psi^2(r)$ . A equação acima pode ser reescrita,

$$m\phi + mg\rho - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = E. \quad (4.12)$$

Podemos simplificar ainda mais a equação,

$$m\phi + mg\rho + \phi_{qu} = E. \quad (4.13)$$

A função de onda  $\psi$  é esfericamente simétrica e não possui nó, de modo que o perfil de densidade diminui monotonicamente com a distância [28].

### 4.4 Equilíbrio Hidrostático

A equação de equilíbrio hidrostático estabelece que, em um sistema auto-gravitante, a força do gradiente de pressão  $\nabla P$  em um fluido deve equilibrar a força gravitacional que atua nesse mesmo fluido, para que o fluido esteja em um estado de equilíbrio. Matematicamente, assumindo um campo de velocidade constante <sup>1</sup> na equação de Euler (4.7), podemos expressar esta condição como,

$$\nabla P = -\rho \nabla \phi_{ef}, \quad (4.14)$$

onde o potencial efetivo  $\phi_{ef}$  é o mesmo abordado em (3.32). Podemos reescrevê-la na forma,

$$\nabla P = -\rho \nabla \phi_{qu} - \rho \nabla \phi. \quad (4.15)$$

O potencial quântico  $\phi_{qu}$  já é bem conhecido (3.25) e portanto, a Equação (4.15) pode ser escrita da seguinte maneira,

<sup>1</sup>O estado estacionário da equação de Euler é obtido tomando  $\partial v / \partial t = 0$ .

$$\nabla P + \rho \nabla \phi - \frac{\hbar^2 \rho}{2m^2} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = 0. \quad (4.16)$$

A Equação descreve o equilíbrio entre pressão devido a interações de curto alcance (dispersão) e gravidade. Dividindo a (4.17) por  $\rho$  e combinando o divergente deste resultado com a equação de Poisson (4.4), obtemos a equação fundamental do equilíbrio hidrostático com efeitos quânticos,

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\nabla P}{\rho} \right) + \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla^2 \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = 4\pi G \rho, \quad (4.17)$$

adicionando a equação politrópica de estado (4.9), em (4.17) obtemos,

$$-\frac{4\pi a_s \hbar^2}{m^3} \nabla^2 \rho + \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla^2 \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = 4\pi G \rho. \quad (4.18)$$

Há quatro limites importantes a serem considerados.

- O caso não interativo corresponde a  $g = a_s = 0$ , lembrando que  $g = 4\pi a_s \hbar^2 / m^3$ . Esta é a situação primeiramente estudada por Ruffini e Bonazzola [29] e revisitada por Membrado et al. [30] com outro método. Nesse caso, a Equação (4.18) reduz a,

$$\frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla^2 \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = 4\pi G \rho. \quad (4.19)$$

Ela descreve o equilíbrio entre a gravidade atrativa e a pressão quântica repulsiva. Esta equação deve ser resolvida numericamente. De acordo com [29], o perfil de densidade decai suavemente até o infinito. O raio onde está contido 99% da massa é dado por  $R_{99} = 9.9 \hbar^2 / GMm^2$ .

- Para  $a_s > 0$ , podemos fazer a aproximação de Thomas-Fermi (TF) que equivale a negligenciar o potencial quântico. Este é o limite considerado por Bohmer e Harko [31]. Nesse caso, a Equação (4.18) torna-se,

$$\nabla^2 \rho + \frac{Gm^3}{a_s \hbar^2} \rho = 0. \quad (4.20)$$

Essa é uma equação do mesmo tipo (4.18), que descreve o equilíbrio entre a gravidade atrativa e as interações repulsivas de curto alcance (espalhamento). Esta equação é equivalente à equação de Lane-Emden para uma politropa de índice  $n = 1$ . Tem a solução analítica  $\rho(r) = (\rho_0 R / \pi r) \sin(\pi r / R)$  onde  $R = \pi (a_s \hbar^2 / Gm^3)^{1/2}$  é o raio da configuração (independente da massa  $M$ ) e  $\rho_0 = \pi M / 4R^3$  é a densidade central.

- Para  $a_s < 0$ , a aproximação TF leva ao colapso, pois mantém apenas os efeitos da gravidade atrativa e das interações atrativas de curto alcance. Se quisermos obter estados de equilíbrio (para  $M < M_{max}$ ), temos que resolver a Equação (4.18) expressando o equilíbrio entre pressão quântica repulsiva e interações atrativas de curto alcance e gravidade.
- Poderíamos também considerar o limite não gravitacional. Nesse caso, a Equação (4.18) reduz a,

$$\frac{4\pi|a_s|\hbar^2}{m^3}\nabla^2\rho + \frac{\hbar^2}{2m^2}\nabla^2\left(\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) = 0. \quad (4.21)$$

Descreve o equilíbrio entre pressão quântica repulsiva e interações atrativas de curto alcance. Sabemos que tais equilíbrios são instáveis [28].

## 4.5 Polítropa Quântica

Vamos focar daqui para frente em um objeto denominado na literatura de *Polítropa Quântica*. Trata-se do caso (4.19) recentemente revisitado por Heyl, Choptuik e Shinrakuk [10].

Fisicamente, trata-se de um objeto com pressão cinética desprezível em comparação à pressão de origem quântica. Assim como esperado, vamos encontrar uma classe de soluções muito semelhante às estrelas politrópicas newtonianas.

Seguindo a notação da Ref. [10], vamos adotar  $\sqrt{\rho} = a$ . Com isso,

$$\phi_{qu} = \frac{1}{2a}\nabla^2 a. \quad (4.22)$$

Inserindo (4.22) na equação de Poisson, teremos,

$$\nabla^2\left(\frac{1}{2a}\nabla^2 a\right) = 4\pi Ga^2. \quad (4.23)$$

Novamente, esse tipo de acoplamento demonstra uma possível relação entre mecânica quântica (fornecida pelo potencial quântico) e a gravitação (fornecida pela equação de Poisson). Podemos notar como fica o Laplaciano em coordenadas esféricas. Partiremos inicialmente para o operador de Laplace dentro dos parênteses da Equação (4.23), então,

$$\nabla^2 a = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d(a)}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(ra). \quad (4.24)$$

Agora podemos substituir o termo da Equação (4.24) em (4.23) e considerar também o Laplaciano de fora do parêntese em coordenadas esféricas, assim teremos,

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\left(\frac{1}{2ar}\frac{d^2}{dr^2}(ra)\right)\right] = 4\pi Ga^2. \quad (4.25)$$

Note que a equação acima pode ser simplificada ainda mais, então,

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left[ \frac{1}{2ar} \frac{d^2}{dr^2} (ra) \right] = 4\pi G a^2. \quad (4.26)$$

Ainda seguindo a notação de [10], vamos adotar  $4\pi G = 1$ . Assim,

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left[ \frac{1}{2ar} \frac{d^2}{dr^2} (ra) \right] = a^2. \quad (4.27)$$

Observe que essa é uma expressão complexa e difícil de resolver. No entanto, vamos partir para as derivadas e simplificar esta equação. Passo a passo, temos:

- A primeira derivada,

$$\frac{d}{dr} (ra) = a + ra'. \quad (4.28)$$

- A segunda derivada,

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dr} (ra) \right) = \frac{d}{dr} (a + ra') = 2a' + ra''. \quad (4.29)$$

Agora podemos substituir a equação obtida em (4.29) na Equação (4.27), que fica,

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left[ \frac{1}{2ar} \frac{d}{dr} (a + ra') \right] = a^2. \quad (4.30)$$

Simplificando todas as derivadas, encontramos a seguinte relação,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \left( \frac{a''}{a} + \frac{ra'''}{a} - \frac{ra''a'}{a^2} - \frac{2ra''a'}{a^2} - \frac{a'^2}{a^2} + \frac{2ra'^3}{a^3} - \frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} + \right. \\ & \left. + \frac{ra'''}{a} + \frac{r^2a''''}{2a} - \frac{r^2a''a'}{2a^2} - \frac{ra''a'}{a^2} - \frac{r^2a''a'}{2a^2} - \frac{r^2a'^2}{2a^2} + \frac{r^2a''a'^2}{a^3} \right) = a^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

podemos ainda, eliminar alguns termos da Equação (4.31), então,

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{r^2a''''}{2a} - \frac{r^2a''a'}{a^2} + \frac{2ra'''}{a} - \frac{4ra''a'}{a^2} - \frac{r^2a'^2}{2a^2} + \frac{2ra'^3}{a^3} + \frac{r^2a''a'^2}{a^3} \right) = a^2, \quad (4.32)$$

note que tem  $1/r^2$  multiplicando o lado esquerdo da igualdade acima, fazendo essa simplificação,

$$\frac{a''''}{2a} - \frac{a''a'}{a^2} + \frac{2a'''}{ar} - \frac{4a''a'}{ra^2} - \frac{a'^2}{2a^2} + \frac{2a'^3}{ra^3} + \frac{a''a'^2}{a^3} = a^2. \quad (4.33)$$

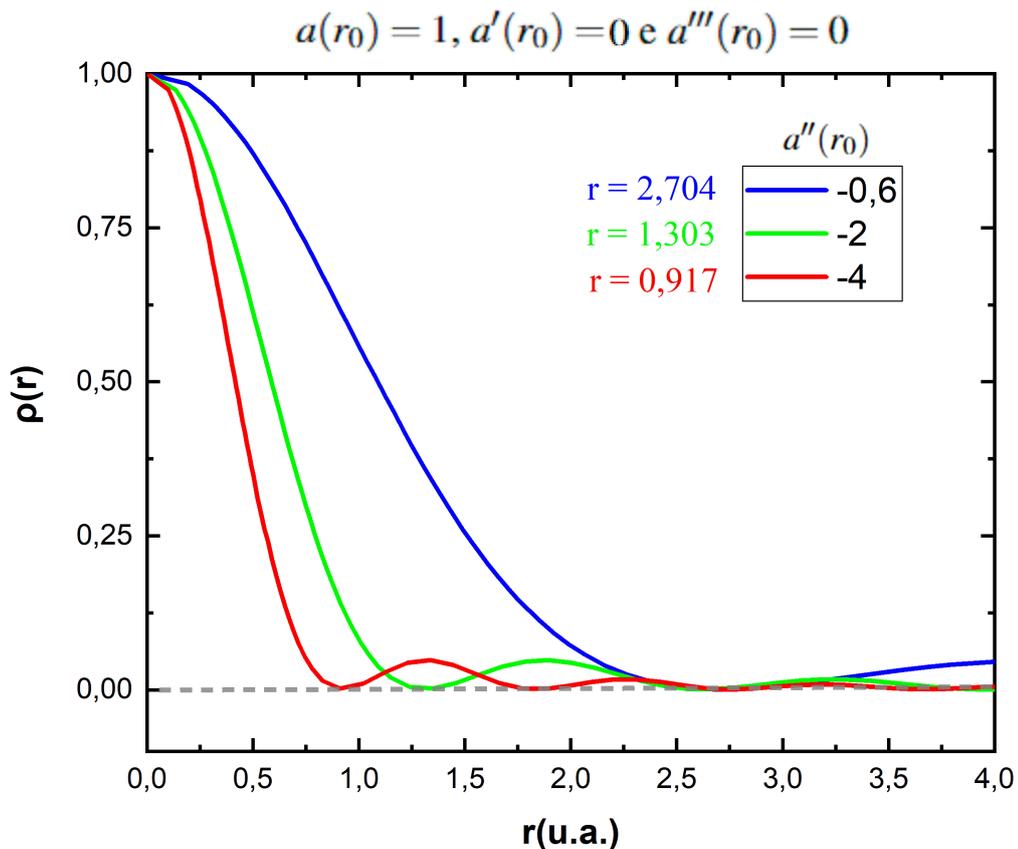
Multiplicando toda a Equação (4.33) por  $2a$  e isolando  $a''''$ , vamos obter,

$$a'''' = 2a^3 - \frac{4a'''}{r} + \frac{2a''a'}{a} + \frac{8a''a'}{ra} + \frac{a'^2}{a} - \frac{4a'^3}{ra^2} - \frac{2a''a'^2}{a^2}. \quad (4.34)$$

Esta é uma equação diferencial de quarta ordem e não foi resolvida analiticamente e sim, numericamente. Iremos modelar este objeto matemático, chamado de polítropa quântica, por meio da solução numérica de sua equação de estrutura (4.34).

Vamos considerar primeiro as seguintes condições. Do ponto de vista numérico, podem aparecer divergências se a variável  $r$  é tomada na origem, em  $r = 0$ , então podemos considerar um valor pequeno (dentro do intervalo dos valores assumidos) próximo de zero  $r_0$ , usaremos  $r_0 = 0,01$ . Na prática, a condição inicial para a densidade central será normalizada e, portanto  $a(r_0) = 1$ . Para todos os casos vamos considerar  $a'(r_0) = 0$ , pois próximo da origem a densidade é constante. Acabamos por perceber que a forma da curva obtida depende do valor inicial  $a''(r_0)$  para Figura 4.1 e  $a'''(r_0)$  para Figura 4.2. Com isso, as curvas das figuras que serão apresentadas, representam diferentes valores para suas derivadas, assim como mostrados nas legendas das figuras. Do mais, estudaremos os seguintes casos para os valores dos parâmetros:

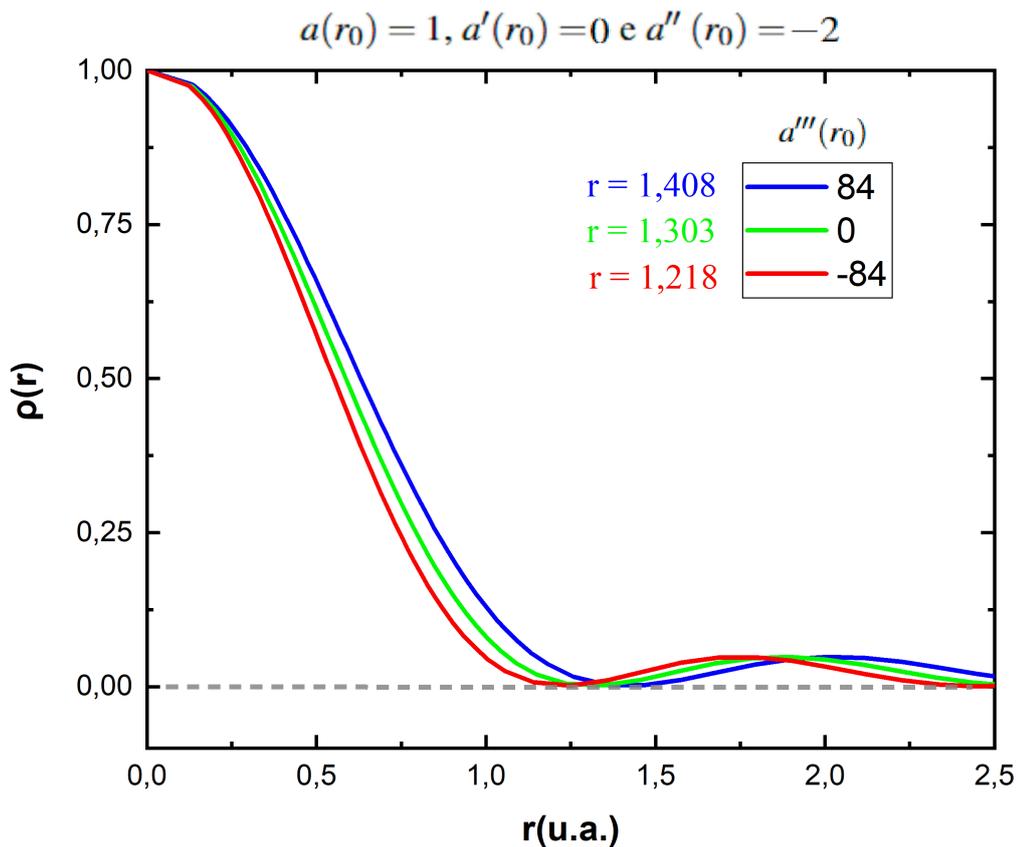
- $a(r_0) = 1$ ,  $a'''(r_0) = 0$  (Figura 4.1).
- $a(r_0) = 1$ ,  $a''(r_0) = -2$ . (Figura 4.2)



**Figura 4.1** Perfil das soluções para  $\rho(r) = a^2(r)$  em função da variável radial  $r$  para diferentes valores de  $a''(r_0)$ . A função  $\rho(r)$  foi normalizada na origem.

Note que a medida em que  $a''(r_0)$  vai ficando cada vez mais negativo, menor é o raio da *Polítropa Quântica*. Observe que a densidade  $\rho(r)$  chega a zero e sobe um pouco antes de retornar a zero, isso acontece para todos os casos da Figura 4.1.

Na Figura 4.2 iremos utilizar outros valores para a condição de contorno. Desta vez vamos plotar diferentes valores para  $a'''(r_0)$ .



**Figura 4.2** O comportamento desse gráfico difere do caso da Figura 4.1, no entanto, o comportamento da densidade se repete pois, ela chega a zero, cresce um pouco e retorna a zero. Note que a medida em que o  $a'''(r_0)$  diminui, o  $r$  também diminui.

## Anisotropia em um Sistema Físico

A quantidade de eventos físicos que dão origem a anisotropia é muito grande. Como já dito, esse desvio de isotropia local pode acontecer tanto em regimes de baixa densidade como em alta densidade [14]. Desta maneira em um sistema bastante denso, processos de transições de fase podem acontecer durante o colapso gravitacional [15]. Por exemplo, transições de fase para um estado condensado de píons de uma estrela densa podem suavizar sua equação de estado e proporcionar uma enorme liberação de energia afetando o que chamamos de evolução das configurações de colapso [16]. Por volta dos anos 70, Sawyer e Scalapino [32] evidenciaram que, devido à geometria dos modos  $\pi^-$ , distribuições anisotrópicas de pressão poderiam ser consideradas para descrever a configuração de fase de anãs-brancas. Uma informação importante é que configurações anisotrópicas de estrelas de nêutrons foram estudadas por Jones [33], Easson e Pethick [34]. A anisotropia local de matéria pode ser representada por um objeto de núcleo sólido, considerando também a presença de um superfluido do tipo  $P$  ou simplesmente uma estrela de bósons <sup>1</sup> [29].

A viscosidade pode ser considerada como outra fonte de anisotropia. Um exemplo disso é o aprisionamento de neutrinos <sup>2</sup>, que acontece quando a densidade central é da ordem  $10^{12}g/cm^3$  [35]. Por causa da dinâmica e da alta densidade de energia desses neutrinos em questão, seu número de Reynolds radiativo  $Re_R$  é pequeno [36], o que torna o núcleo viscoso. Barreto e colaboradores [37] apresentam alguns cálculos numéricos para a anisotropia causada pela viscosidade de um fluido.

Agora podemos considerar um sistema de baixa densidade com anisotropia local, como, por exemplo galáxias esféricas, as mesmas apresentadas por Jeans [38]. Elas são criadas por uma distribuição de velocidade anisotrópica. Neste caso é usual assumir uma configuração esférica sem colisões, pois não apresentam fluxo de velocidade líquida e as dispersões de velocidades azimutal  $v_\phi$  e polar  $v_\theta$  são iguais. A velocidade radial  $v_r$  pode ser dada por,

$$\langle v_\phi \rangle = \langle v_\theta \rangle = \langle v_r \rangle = 0, \quad (5.1)$$

$$\langle v_\phi^2 \rangle = \langle v_\theta^2 \rangle = (1 - \Lambda) \langle v_r^2 \rangle. \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>É um objeto astronômico hipotético previsto no campo da física de partículas e da relatividade geral. Propõe-se que seja composto principalmente de bósons, que são uma das duas classes fundamentais de partículas na natureza.

<sup>2</sup>Refere-se ao processo pelo qual os neutrinos interagem com a matéria e são efetivamente "presos" dentro de um ambiente astrofísico denso, como o núcleo de uma estrela em colapso ou o início do universo.

Em que os brackets denotam as médias da distribuição de partículas, e  $\Lambda \leq 1$  é um parâmetro que mede a distribuição de anisotropia de velocidades. Para  $\Lambda = 1$  só existiriam orbitas radiais. O caso isotrópico corresponde à  $\Lambda = 0$  enquanto que se  $\Lambda \rightarrow -\infty$  as órbitas seriam puramente circulares.

No equilíbrio hidrostático, um gás sem colisões pode ser descrito pela equação de Jeans [38],

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho - \frac{2\Lambda(r)P_r}{r}. \quad (5.3)$$

Essa equação é obtida multiplicando a equação de Boltzmann-Vlasov pela velocidade e integrando sobre todas as velocidades. As quantidades físicas  $P_r, \rho, m$  e  $G$  são respectivamente, pressão radial, densidade de massa, massa interior e constante gravitacional. A Equação (5.3) é apenas uma equação de equilíbrio de fluido anisotrópico [39], e podemos escrevê-la na forma,

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho + \frac{2}{r}(P_\perp - P_r), \quad (5.4)$$

em que  $P_\perp$  é a pressão tangencial e  $\Lambda(r)$  pode ser escrito na forma,

$$\Lambda(r) = \frac{P_r - P_\perp}{P_r}. \quad (5.5)$$

Podemos fazer uma relação com a Equação (5.3),

$$P_r \equiv \rho \langle v_r^2 \rangle, \quad (5.6)$$

$$P_\perp \equiv \rho \langle v_\theta^2 \rangle. \quad (5.7)$$

Essa é uma descrição da anisotropia local em um sistema sem colisões que foi considerada por [40]. Como, por exemplo no caso particular de halos galácticos de matéria escura fermiônica, o momento angular de neutrinos fluindo para um halo esfericamente simétrico deve ser conservado, levando assim a distribuições de velocidade anisotrópicas [41]. No caso de um sistema em rotação, o limite de rotações lentas equivale a pequenos desvios de simetria esférica. Isto nos leva da equação de equilíbrio hidrostático em primeira ordem para a equação equilíbrio para fluidos em configuração anisotrópica [8]. Com isso,

$$\nabla P = -\rho \nabla \phi + \vec{c}, \quad (5.8)$$

onde  $\nabla$  é o operador gradiente em três dimensões,  $P$  é a pressão total,  $\phi$  é potencial gravitacional e  $\vec{c}$  é o vetor de aceleração centrífuga. Em coordenadas esféricas o componente desse vetor é dado por,

$$c_r = \frac{2}{3}\omega^2 r(1 - L_2), \quad (5.9)$$

$$c_\theta = \omega^2 r \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3} \omega^2 r \frac{\partial L_2}{\partial \theta}. \quad (5.10)$$

Aqui introduzimos o segundo polinômio de Legendre  $L_2(\theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$  e  $\omega$  é a velocidade angular.

Em seguida, vamos expandir a Equação (5.8) em torno da simetria esférica dividindo todas as funções escalares em uma parte esfericamente simétrica e uma que é proporcional ao segundo polinômio de Legendre,

$$P(r, \theta) = P_0(r) + P_2(r)L_2(\theta), \quad \phi = \phi_0 + \phi_2 L_2. \quad (5.11)$$

Com seus módulos,

$$|P_2| \ll P_0, \quad |\phi_2| \ll \phi_0. \quad (5.12)$$

Então, para a parte esfericamente simétrica obtém-se,

$$\frac{dP_0}{dr} = -\rho_0 \frac{d\phi_0}{dr} + \frac{2}{3} \rho_0 \omega^2 r. \quad (5.13)$$

A partir desta última equação, que a situação é formalmente a mesma de um fluido anisotrópico com,

$$P_\perp - P_r = \frac{1}{3} \rho_0 \omega^2 r^2. \quad (5.14)$$

Note que as partes esfericamente simétricas não são idênticas às funções correspondentes do caso não rotativo. Isso pode ser visto no fato de que a aceleração centrífuga tem uma correspondente esfericamente simétrica [14], veja a Equação (5.9).

Se pensarmos em dois modelos de fluidos (viscoso e rotativo) no mesmo objeto físico, isto nos permitirá verificar a anisotropia fracionária desse objeto, que é semelhante ao caso de uma estrela de nêutrons, devido à grande quantidade de prótons e elétrons que é necessária para estabilizar a matéria de nêutrons contra o decaimento  $\beta$  [42].

Para finalizar esse tópico, vale a pena dizer que um exemplo bem interessante de um sistema de dois fluidos é dado pelo superfluido He II <sup>3</sup>, dentro da teoria de Landau [43]. A teoria nos mostra que o objeto físico se comporta como se fosse composto por dois fluidos misturados, sendo um deles um superfluido e o outro um fluido normal.

---

<sup>3</sup>É um fascinante estado quântico da matéria que ocorre quando o hélio II é resfriado a temperaturas extremamente baixas próximas do zero absoluto. Nessas temperaturas, o hélio II passa por uma transição de fase e entra em um estado conhecido como fase superfluida.

## 5.1 Os critérios de Jeans para a anisotropia de matéria

Podemos afirmar que pequenas anisotropias locais podem gerar alterações na estabilidade do sistema. Agora vamos estender o critério de instabilidade de Jeans <sup>4</sup> para fluidos que podem produzir anisotropia em sua evolução [14]. Iremos considerar um problema de uma esfera isotérmica de raio  $R$ , envolvida em um meio de pressão  $P > 0$ . Esta esfera é formada por um fluido de matéria anisotrópica que possui uma pressão radial  $P_r$  que cai para  $P_r = P$  na superfície. Como estamos tratando de um problema de uma esfera que possui simetria esférica em relação ao seu centro, então não devemos nos preocupar com a evolução fora dessa esfera, já que o campo gravitacional fora dela não vai influenciar no seu interior [14].

Vamos seguir esse estudo a partir do teorema virial. Sendo assim, primeiro vamos derivar esse teorema para o caso anisotrópico. A fim de comparação, podemos derivar a massa de Jeans para sistemas isotrópicos e em seguida faremos o mesmo para massa anisotrópica [38]. Logo a frente iremos apresentar uma discussão interessante sobre duas possíveis fontes de anisotropia em um gás estelar.

### 5.1.1 Teorema Virial

Podemos iniciar com a equação de equilíbrio hidrostático para uma distribuição esfericamente simétrica de um fluido anisotrópico [39], que chamamos de limite newtoniano. Podemos multiplicar (5.4) por  $4\pi r^3$  e integrar nos intervalos  $[0, R]$ . Com isso, teremos,

$$\begin{aligned} 4\pi \int_0^R \frac{dP_r}{dr} r^3 dr &= 4\pi [P_r r^3]_0^R - 12\pi \int_0^R P_r r^2 dr, \\ &= 4\pi R^3 P_r(R) - 3 \int_0^M \frac{P_r}{\rho} dm, \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde  $M$  é a massa total contida dentro da esfera de raio  $R$ . Podemos ainda utilizar,

$$dr = \frac{dm}{4\pi r^2 \rho}. \quad (5.16)$$

A Equação (5.4) se tornará,

$$4\pi R^3 P_r(R) - 3 \int_0^M \frac{P_r}{\rho} dm = -G \int_0^M \frac{m}{r} dm + 8\pi \int_0^R (P_\perp - P_r) r^2 dr. \quad (5.17)$$

Chamamos de energia gravitacional  $E_g$  a quantidade,

$$E_g = -G \int_0^M \frac{m}{r} dm, \quad (5.18)$$

---

<sup>4</sup>Descreve as condições sob as quais uma nuvem de gás entrará em colapso e formará uma estrela. O critério é baseado no equilíbrio entre a força gravitacional que atrai o gás e a pressão do gás que tenta se expandir para fora.

A energia interna  $E_i$  é,

$$E_i = \int_0^M u dm, \quad (5.19)$$

onde  $u$  é a energia interna por unidade de massa. Para uma equação geral de estado, podemos definir a quantidade  $\zeta$  por,

$$\zeta u = 3P_r/\rho. \quad (5.20)$$

Temos que assumir que  $\zeta$  é constante em toda a esfera. Substituindo as Equação (5.18) e (5.19) na Equação (5.17) encontraremos o teorema virial para um fluido anisotrópico,

$$E_g + \zeta E_i = 4\pi R^3 P_r(R) - 8\pi \int_0^R (P_\perp - P_r) r^2 dr. \quad (5.21)$$

### 5.1.2 Massa de Jeans Isotrópica

Neste tópico seguimos a abordagem feita por Kippenhahn e Weigert [8]. Para uma configuração isotrópica temos que  $P_r = P_\perp = P$ . Vamos considera uma esfera isotérmica de raio finito  $R$ , envolvida em um meio de pressão  $P^* > 0$ . Neste caso uma solução da equação de Lane-Emden para um politrópico isotérmico pode nos fornecer a estrutura da esfera. A solução se encerra onde a pressão  $P$  cai até a pressão superficial  $P(R) = P^*$ , temos portanto,

$$E_g = -\Theta G \frac{M^2}{R}, \quad (5.22)$$

onde  $\Theta$  é um fator de ordem um que é obtido a partir da integração da equação de Lane-Emden. A energia interna  $E_i$  da esfera é dada por,

$$E_i = c_0 MT, \quad (5.23)$$

onde  $c_0$  é o calor específico a volume constante e  $T$  a temperatura. Para o meio isotrópico que preenche a esfera, o teorema do virial, Equação (5.21), será,

$$E_g = \zeta E_i = 4\pi R^3 P(R). \quad (5.24)$$

Nesta expressão,

$$\zeta u = 3 \frac{P}{\rho}. \quad (5.25)$$

Assumimos que este meio é descrito por um gás monoatômico ideal, então,

$$\zeta = 2,$$

$$c_v = \frac{3\Omega}{2\mu}, \quad (5.26)$$

onde  $\Omega$  é a constante do gás e  $\mu$  o peso molecular médio adimensional. A Equação (5.24) combinada com as equações (5.22), (5.23) e (5.26) torna-se,

$$P(R) = -\frac{\Theta GM^2}{4\pi R^4} + \frac{3\Omega MT}{4\pi\mu R^3}. \quad (5.27)$$

No lado direito, o primeiro termo da Equação (5.27) é a pressão que ocorre devido à auto-gravidade da esfera que levaria ao seu colapso, e o segundo termo é a pressão interna do gás tentando expandir a esfera.

Fixando os valores de  $\Theta$ ,  $M$  e  $T$  podemos ver na Equação (5.27) como  $P$  depende de  $R$ ,

$$R_m = \frac{4\Theta G\mu M}{9\Omega T}. \quad (5.28)$$

Para uma esfera de raio  $R_m$  podemos escrever sua massa como,

$$M(R_m) = \frac{4}{3}\pi R_m^3 \bar{\rho}, \quad (5.29)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a densidade média, e substituindo a Equação (5.29) na Equação (5.28) obtemos,

$$R_m^2 = \frac{27\Omega T}{16\pi\Theta G\mu\bar{\rho}}. \quad (5.30)$$

Aqui podemos apontar as diferenças entre as equações (5.28) e (5.30). A primeira equação temos uma relação clara entre o raio e a massa, mostrando que a pressão possui um máximo. Já a segunda, define um raio de uma dada configuração, embutida em um meio de pressão  $P^*$ , onde o valor em um momento vai coincidir com o valor crítico dado pela Equação (5.28). Vamos avançar um pouco e realizar uma pequena compressão na esfera com o raio dado pela Equação (5.30). Sendo  $M$  constante, fica claro que a densidade aumenta. Logo, o raio da esfera ficará menor que o raio crítico dado pela Equação (5.28), ou seja, nosso sistema passa a ser instável.

O critério de estabilidade é dado pela definição da massa de Jeans,

$$M_j = \frac{4\pi}{3} R_m^3 \bar{\rho} = \frac{27}{16} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\Omega T}{\Theta G\mu}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right)^{1/2}. \quad (5.31)$$

Considerando  $T = 10^2$  K,  $\mu = 1$  e  $\bar{\rho} = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$  típico para as condições em nuvens interestelares de hidrogênio neutro, e  $\Omega = 8,3 \times 10^7 \text{ dyn cm K}^{-1} \text{ g}^{-1}$ ,  $G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ g}^{-2}$ ,  $M_\odot = 1,989 \times 10^{33} \text{ g}$  e  $\Theta \lesssim 1$ , obtemos,

$$M_j = \frac{0,36}{\Theta^{3/2}} \times 10^5 M_\odot. \quad (5.32)$$

Percebemos que apenas massas da ordem igual ou superior a  $10^5 M_\odot$  se mostram capazes de colapsar devido à condição de instabilidade de Jeans. Isto levanta a seguinte questão, como é possível, estrelas se formarem no meio interestelar? Bem, podemos imaginar que uma nuvem que excede a massa de Jeans, no processo de colapso, ela vai fragmentando e esses fragmentos se tornam instáveis e colapsa muito mais rapidamente do que a própria nuvem [14].

### 5.1.3 Massa de Jeans Anisotrópica

Para estudar este caso de pressões anisotrópicas e sua instabilidade, podemos fazer o mesmo que no caso Isotrópico, mas assumindo que  $P_r$  é diferente de  $P_\perp$ . Então, como no caso anterior, vamos considerar uma esfera isotérmica de raio finito  $R$ , envolvida em um meio de pressão  $P^* > 0$ . Podemos dizer também que a estrutura da esfera pode ser obtida a partir da equação de Lane–Emden. Mais uma vez encerramos a solução em um certo raio, em que  $P_r$  cai para  $P_r(R) = P^*$  na superfície. Sabemos que para a energia gravitacional e energia interna temos as mesmas expressões, Equação (5.22) e Equação (5.23), em que,

$$\zeta = 3P_r/\rho. \quad (5.33)$$

Assumimos que as relações termodinâmicas básicas são as mesmas para o gás ideal localmente isotrópico. Seguindo o mesmo raciocínio, observamos que, neste problema em particular, a origem da anisotropia local não se encontra em uma mudança de fase específica, mas em alguns agentes externos, como em um campo magnético ou em uma rotação residual da nuvem [14].

Agora, para este meio preenchendo a esfera, obtemos do Teorema do Virial e da Equação (5.21) com as Equações (5.22), (5.23) e (5.33), a seguinte expressão

$$P_r(R) = -\frac{\Theta GM^2}{4\pi R^4} + \frac{3\Omega MT}{4\pi\mu R^3} + \frac{2}{R^3} \int_0^R (P_\perp - P_r)r^2 dr. \quad (5.34)$$

Observamos na Equação (5.34) se a contribuição líquida do termo devido à anisotropia da esfera ( $P_\perp - P_r$ ), é positiva ou negativa. Para evitar singularidades em  $r = 0$  nosso sistema tem que se comportar como,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P_\perp - P_r}{R} = 0. \quad (5.35)$$

Vamos seguir a abordagem feita por Cosenza e colaboradores [44]. Assim, assumiremos como exemplo,

$$P_\perp - P_r = CR^N, \quad (5.36)$$

onde  $C$  e  $N > 1$  são constantes. A Equação (5.34) corresponde à,

$$P_r(R) = -\frac{\Theta GM^2}{4\pi R^4} + \frac{c_v MT}{2\pi R^3} + \frac{2CR^N}{N+3}. \quad (5.37)$$

Com a definição da Equação (5.28) para  $R_m$ , podemos introduzir a variável adimensional,

$$x = R/R_m, \quad (5.38)$$

o que nos permite reescrever a Equação (5.37) como,

$$P_r(x) = \alpha \left( \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} \right) + \beta x^N, \quad (5.39)$$

sendo que,

$$\alpha = \Theta GM^2 / \pi R_m^4. \quad (5.40)$$

$$\beta = 2CR_m^N / (N+3). \quad (5.41)$$

Está claro que para  $\beta = 0$  recuperamos a Equação (5.27). Agora, fixando o valor de  $\Theta, M$  e  $T$  podemos ver, na Equação (5.39), como  $P$  varia de  $x$  ou  $R$ . Os pontos estacionários da Equação (5.39) são dados por,

$$\frac{dP_r}{dx} = \frac{\alpha}{x^5} \left( 1 - x + \frac{N\beta}{\alpha} x^{N+4} \right) = 0. \quad (5.42)$$

Em seguida, analisamos o comportamento de  $P_r(x)$  apenas para pequenos valores de  $\beta/\alpha$ .

#### 5.1.4 Sobre a possível origem da anisotropia

Antes de tentar focar apenas nas possíveis causas da anisotropia, podemos de início descartar a anisotropia causada por sistemas altamente densos, já que, como é o caso de muitas estrelas, estamos trabalhando em objetos com densidade de massa relativamente baixa [45].

Neste caso específico, dada sua baixa densidade, podemos listar algumas possíveis causas para a anisotropia, como: um campo magnético no plasma; interação entre dois gases (por exemplo, hidrogênio ionizado e elétrons) que é um fluido anisotrópico [46]; rotação lenta da nuvem inicial; distribuição de velocidades em um sistema sem colisões (por exemplo, halo galácticos de matéria escura fermiônica) [41] e fluxo de radiação líquida entrando e saindo da nuvem de origem.

Seja o exemplo de rotação lenta, que é um exemplo de dispersão de velocidade anisotrópica. De fato, como já foi abordado em tópicos anteriores, as equações hidrodinâmicas podem ser expandidas em torno de partes esfericamente simétricas e uma que é proporcional ao segundo polinômio de Legendre [14]. Desta forma, temos para parte esfericamente simétrica,

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} + \frac{2}{3}\rho\omega^2 r. \quad (5.43)$$

É óbvio que a partir da Equação (5.43) a situação é formalmente a mesma de um fluido anisotrópico com,

$$P_{\perp} - P_r = \frac{1}{3}\rho\omega^2 r^2. \quad (5.44)$$

No entanto, é importante notar que a estrela rotativa é suportada pela pressão do fluido isotrópico, que é o caso mais padrão.

Vamos assumir que o sistema é homogêneo e rigidamente rotativo. Observamos que a anisotropia causada pela rotação lenta é do mesmo tipo que a considera no exemplo da Equação (5.36), onde  $N = 2$  e  $C = \rho\omega^2/3 > 0$ . Para  $\beta/\alpha = 10^{-10}$  e  $M = 10^2 M_{\odot}$ ,  $\Theta = 1$ ,  $\rho = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$ ,  $T = 10^2 \text{ K}$  podemos calcular o a partir das Equações (5.44), (5.40), (5.41) e (5.28) obtemos,

$$\omega \approx 10^{-15} \text{ s}^{-1}. \quad (5.45)$$

Coincidentemente, este valor é da mesma ordem de magnitude da velocidade angular do nosso Sol em torno do centro da nossa Galáxia [14].

Podemos encerrar este tópico enfatizando que não estamos interessados em mostrar a origem específica da anisotropia, mas apontar a variedade de circunstâncias e cenários em que se sabe que o perfil de desvio de isotropia local aparece.

### 5.1.5 Algumas considerações

Como o previsto no tópico no capítulo anterior, sobre as instabilidades que aparecem a partir da anisotropia de pressão local, o critério de instabilidade de Jeans é fortemente modificado por desvio de isotropia local [14]. A origem dessa mudança dependerá basicamente da natureza da anisotropia em questão.

Logo acima, abordamos um exemplo em que o aparecimento de uma faixa de instabilidade pode ser compreendida pela inspeção da Equação (5.37) que  $C > 0$ . Isso fica claro se supomos que o segundo termo ao lado direito da Equação (5.37) é consideravelmente menor que os outros dois termos, tornando  $c_v$  e  $T$  muito pequenos. Então a derivada radial do termo gravitacional e anisotrópico, tomada no ponto  $R$ , é positiva. Obviamente que sistemas de massas pequenas seriam instáveis se apenas o segundo termo da Equação (5.37) for arbitrariamente pequeno. Não encontramos configurações estáveis se este termo se anular.

Nós apontamos alguns desvios de isotropia local, e falamos um pouco da importância de seu aparecimento, que acontecem nos processos evolutivos da nuvem interestelar original.

## Polítropa Anisotrópica

Iremos dedicar esse capítulo para apresentar em mais detalhes a *Polítropa Anisotrópica*. Seguiremos utilizando a mesma abordagem feita por Herrera e Barreto [47].

No contexto da gravidade newtoniana, as equações politrópicas de estado são particularmente úteis para descrever uma grande variedade de situações, como, por exemplo: esferas gasosas politrópicas [8], núcleos estelares em colapso [48], politrópicas girando lentamente [49], etc. Seu sucesso é decorrente principalmente da simplicidade da equação de estado e da equação resultante (Lane-Emden), sendo a equação principal neste tipo de estudo [47]. Vale ressaltar que Polítropas no contexto da relatividade geral foram consideradas por Tolman-Oppenheimer-Volkoff [50] e [51], e sua estabilidade estudada por Bludman [52]. No entanto, neste trabalho restringimos a análise as *Polítropas Newtonianas*.

A equação de estado politrópica pode ser escrita na forma,

$$P = K\rho^{1+1/n}, \quad (6.1)$$

que é a mesma Equação (4.9) apresentada no capítulo IV, onde  $P$ ,  $\rho$  e  $n$  denotam a pressão isotrópica, densidade de massa (bariônica) e o índice politrópico, respectivamente.

A equação de estado politrópica pode ser usada para modelar dois tipos diferentes de situações, que são elas:

- Quando a constante politrópica  $K$  é fixa e pode ser calculada a partir de constantes naturais. Este é o caso de um gás completamente degenerado no estado não relativístico ( $n = 3/2$ ) e no limite relativístico ( $n = 3$ ). Polítropas deste tipo são particularmente úteis para modelar objetos compactos, como anãs brancas.
- Quando  $K$  é um parâmetro livre, como, por exemplo, no caso de um gás ideal isotérmico ou em uma estrela completamente convectiva.

Se permitirmos que as pressões principais (radial e tangencial) sejam diferentes, a equação de equilíbrio hidrostático em coordenadas esféricas pode ser escrita na forma,

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}\rho + \frac{2}{r}\Delta, \quad (6.2)$$

onde a quantidade  $\Phi$  é o potencial gravitacional e  $\Delta = P_{\perp} - P_r$  é o termo de anisotropia, em que  $P_r$  e  $P_{\perp}$  denotam as pressões radial e tangencial, respectivamente. Este é o limite newtoniano

da equação generalizada de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para um fluido anisotrópico. [12]. Vale a pena mencionar que devido à simetria esférica do sistema, apenas duas quantidades de origens distintas podem diferir,  $P_\theta = P_\phi = P_\perp$  que difere de  $P_r$ .

Retornamos à equação de Poisson,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho, \quad (6.3)$$

onde  $G$  denota a constante gravitacional. Considerando que o fluido satisfaz uma equação de estado politrópica para a pressão radial  $P_r$ , então combinando as equações (6.1) e (6.2), obtemos

$$\gamma K \rho^{\gamma-1} \rho' = -\rho \frac{d\Phi}{dr} + \frac{2}{r} \Delta, \quad (6.4)$$

em que  $1 + 1/n = \gamma$ . Portanto, dois casos diferentes podem ser considerados a partir de agora:  $\gamma \neq 1$  e  $\gamma = 1$ .

- Para o caso  $\gamma \neq 1$  podemos integrar a equação acima entre qualquer interior de  $r$ , o que nos dá,

$$\Phi = F(r) - K(1+n)\rho^{1/n}, \quad F(r) = \int_0^r \frac{2\Delta}{r\rho} dr. \quad (6.5)$$

A densidade  $\rho$ , agora pode ser escrita da seguinte forma,

$$\rho = \left[ \frac{(\Phi - F)}{-K(n+1)} \right]^n. \quad (6.6)$$

Podemos introduzir uma variável nova,

$$z \equiv \alpha r, \quad \alpha^2 \equiv \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n} [(\Phi_c - F_c)]^{n-1}. \quad (6.7)$$

O subscrito  $c$  é obtido em  $r = 0$ . Agora iremos fazer uma relação que estabelece conexão entre a densidade e o potencial,

$$w \equiv \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n} = \frac{\Phi - F}{\Phi_c - F_c}, \quad (6.8)$$

onde, como antes, o subscrito  $c$  indica que a quantidade é avaliada em  $r = 0$ , a equação estendida de Lane-Emden pode ser escrita como,

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dX}{dz} + (X - Y)^n = 0, \quad (6.9)$$

onde,

$$X = w + Y \quad e \quad Y = \frac{F}{\Phi_c - F_c}. \quad (6.10)$$

- Agora podemos considerar o caso isotérmico, que corresponde a  $\gamma = 1$ , a Equação (6.4) torna-se,

$$\frac{d\Phi}{dr} = -K\rho^{-1}\rho' + \frac{2\Delta}{r\rho}. \quad (6.11)$$

Integrando a Equação (6.11), obteremos uma densidade do tipo,

$$\rho = \rho_c e^{(F-\Phi)/K}, \quad (6.12)$$

onde o potencial foi considerado zero em  $r = 0$  e  $F$  já foi definido em (6.5) (com seu limite inferior). Então a equação de Lane-Emden correspondente torna-se,

$$\frac{d^2X}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dX}{dz} = e^{-w}, \quad (6.13)$$

agora, com as seguintes relações,

$$z = \alpha r \quad e \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G\rho_c}{K}, \quad (6.14)$$

podemos dizer então,

$$X = \frac{F}{K} + w = \frac{\Phi}{K}. \quad (6.15)$$

É óbvio que, para prosseguir com a modelagem deste objeto, isto é, integrar as equações (6.9) e (6.13), é necessário prescrever a anisotropia específica do problema  $\Delta$ . Tal informação, depende do problema físico específico em consideração. Mas em vez disso, será utilizada um ansatz que já foi aplicada na modelagem de estrelas anisotrópicas relativísticas [53], cuja principal virtude (além de sua simplicidade) é o fato de os modelos obtidos estarem conectados com o caso isotrópico quando tomados os limites apropriados.

## 6.1 Ansatz para Polítropa Anisotrópica

A fim de obter modelos específicos, será adotada a versão não relativística do procedimento usado em [44], que permite obter soluções para matéria anisotrópica a partir de soluções conhecidas para matéria isotrópica. Adotaremos,

$$\Delta_c \equiv C f_{(P_r, r)} (\rho + P_r) r^N, \quad (6.16)$$

onde  $C$  é um parâmetro que mede a anisotropia. A função  $f_{(P_r,r)}$  e o número  $N$  devem ser específicos para cada modelo. Considerando  $P_r \rightarrow 0$  (como no caso da Polítropa Quântica), teremos a expressão,

$$\Delta \equiv C f_{(r)} \rho r^N. \quad (6.17)$$

Para  $N > 1$  a Equação (6.17) satisfaz a condição de contorno da Equação (5.35). Substituindo a Equação (6.17) em (6.5),

$$F = \int \frac{2C f_{(r)} \rho r^N}{r \rho} dr \Rightarrow \int 2C f_{(r)} r^{N-1} dr. \quad (6.18)$$

Podemos derivar a expressão acima e relacioná-la com (6.5). Isto nos retornará uma equação da seguinte forma,

$$f_{(r)} r^{N-1} = \frac{d\Phi}{dr}. \quad (6.19)$$

De acordo com Herrera e Santos [14], podemos apresentar três soluções para a função  $f_{(P_r,r)}$ :

- Bowers e Liang [39],

$$f_{(P_r,r)} = \frac{\rho + 3P_r}{1 - \frac{2m}{r}}. \quad (6.20)$$

A Equação (6.20) é normalmente usada quando consideramos que parte da anisotropia é induzida gravitacionalmente.

Uma configuração de equilíbrio existe para todos os valores de  $(M/R)$  tal que a pressão central  $P_c$  é finita. Para situação crítica ou podemos chamar de modelo crítico, o valor de  $(M/R)_{cri}$  tal que  $P_c$  torna-se infinito, podemos escrevê-la,

$$(2M/R)_{cri} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-\ell}, \quad (6.21)$$

em que  $M = m(R)$  é a massa contida em qualquer região dentro do raio  $R$  da estrela, a constante  $\ell = 3C/2$ . Vamos exigir que  $\ell \leq 1$ , portanto  $C \leq 2/3$ , pois na condição em que  $C > 2/3$  a pressão tangencial  $P_\perp$  se torna maior que a pressão radial  $P_r$ . Para uma discussão mais aprofundada sobre essa questão, consultar [14] e [39].

- Floridis [54],

$$f_{(P_r,r)} = \rho \left( \frac{1 - 3m/r}{1 - 2m/r} \right). \quad (6.22)$$

A equação acima pode ser interpretada como a densidade em um sistema auto-gravitante de muitas partículas movendo-se em órbitas circulares de orientação randômica (aglomerado de Einstein).

- Di Prisco [55],

$$f_{(P_r,r)} = \frac{[1 - (1 - \mu)r^2]^{h/2} - \mu^{h/2}}{3\mu^{h/2} - [1 - (1 - \mu)r^2]^{h/2}}, \quad (6.23)$$

onde  $\mu \equiv 1 - 2M/R$  e  $h = 1 - 2C$ . Note que se  $C = 0$  (caso isotrópico), temos  $h = 1$  e se  $C = 1/2$  a constante  $h$  se tornará 0.

Com isso, temos uma estrutura geral para modelar polítropas na presença de pressão anisotrópica. Contudo, devemos enfatizar que tudo o que foi feito por Herrera e Barreto [47] requer simetria esférica, pelo menos como uma aproximação. É possível que esta simetria possa ser quebrada por um forte campo magnético, tornando a distribuição anisotrópica e não esférica [56]. Nesse caso o método apresentado aqui não se aplica. Para uma revisão mais aprofundada relacionada às estruturas gravitacionais anisotrópicas, consultar [57].

## Polítropa Quântica Anisotrópica

Neste capítulo iremos trabalhar com o objeto físico que denominamos de *Polítropa Quântica Anisotrópica*. A partir da abordagem dos capítulos anteriores, iremos modelar um objeto físico que, ao nosso conhecimento, ainda não foi estudado na literatura. Este objeto será construído a partir do objeto denotado de *Polítropa Quântica*, apresentado no capítulo IV. Será atribuído a ele um certo grau de anisotropia, seguindo a construção do capítulo VI. Portanto vamos verificar como um grau de anisotropia  $\Delta$  impacta a classe de soluções encontradas por Heyl, Choptuik e Shinkaruk [10].

Nossa estratégia é abordar o equilíbrio hidrostático considerando o potencial efetivo  $\phi_{ef}$ , característico da polítropa quântica, mas com o termo adicional de anisotropia  $\Delta$ . Portanto, temos

$$\nabla P = -\rho \nabla \phi_{ef} + \frac{2}{r} \Delta. \quad (7.1)$$

Observando a Equação (7.1), podemos verificar alguns casos e visualizar o seu comportamento conforme os limites forem considerados:

- CASO I: relembremos o caso clássico de equilíbrio hidrostático ( $\phi_{ef} = \phi, \Delta = 0$ ) onde, a partir da segunda lei de Newton, escrita na forma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \phi, \quad (7.2)$$

adota-se uma situação estacionária,  $d\vec{v}/dt = 0$ , obtendo

$$\nabla P = -\rho \nabla \phi. \quad (7.3)$$

Esta é a *Polítropa Newtoniana* (sujeita a um potencial gravitacional  $\phi$ ).

- CASO II: considerarmos não haver anisotropia no problema e que o objeto não é uma estrela (assim como na polítropa quântica), pois assumimos que o gradiente de pressão é nulo. Teremos então,  $P = \Delta = 0$ ,

$$-\rho \nabla \phi_{ef} = 0 \quad \text{ou} \quad -\nabla \left[ \phi - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \nabla^2(\sqrt{\rho}) \right] \rho = 0, \quad (7.4)$$

$$\nabla^2 \left[ \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \nabla^2(\sqrt{\rho}) \right] = 4\pi G \sqrt{\rho}. \quad (7.5)$$

Neste limite, o objeto físico descrito é a já conhecida *Polítropa Quântica* [10].

- CASO III: Como uma extensão do caso anterior, podemos considerar que o termo de anisotropia é não-nulo, ou seja,  $P = 0$  e  $\Delta \neq 0$ . Então,

$$-\nabla \left[ \phi - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \nabla^2(\sqrt{\rho}) \right] \rho + \frac{2}{r} \Delta = 0. \quad (7.6)$$

Este é o caso que nos interessa, pois aqui temos uma expressão com a presença de um potencial quântico e o termo de anisotropia de pressão.

## 7.1 Modelando o objeto: *Polítropa Quântica Anisotrópica*

Vamos aplicar o conceito de anisotropia às Polítropas Quânticas. Estudaremos o objeto *Polítropa Quântica Anisotrópica*, e obteremos soluções numéricas para suas configurações de equilíbrio.

Tomando a Equação (7.6), podemos reescrevê-la na forma,

$$\nabla \left[ \phi - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \nabla^2(\sqrt{\rho}) \right] = \frac{2\Delta}{r\rho}. \quad (7.7)$$

Aplicando o divergente nos dois lados da equação acima, obteremos o Laplaciano dos potências,

$$\nabla^2 \left[ \phi - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \nabla^2(\sqrt{\rho}) \right] = \nabla \left( \frac{2\Delta}{r\rho} \right). \quad (7.8)$$

Vamos simplificar a Equação (7.8). Com isso,

$$\nabla^2 \left[ \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \nabla^2(\sqrt{\rho}) \right] = \nabla^2 \phi + \nabla \left( \frac{2\Delta}{r\rho} \right). \quad (7.9)$$

Agora vamos fazer algumas relações que são convenientes para nossa expressão (7.9). Chamaremos  $\sqrt{\rho} = b$  e introduziremos a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \left[ \frac{1}{2b} \nabla^2(b) \right] = 4\pi G |b|^2 + \nabla \left( \frac{2\Delta}{rb^2} \right). \quad (7.10)$$

Adotamos  $4\pi G = 1$ . Com isso, a equação acima assumirá a forma,

$$\nabla^2 \left[ \frac{1}{2b} \nabla^2(b) \right] - b^2 = \nabla \left( \frac{2\Delta}{rb^2} \right). \quad (7.11)$$

Em coordenadas esféricas a Equação (7.11) assume a forma,

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left[ \frac{1}{2br} \frac{d}{dr} (b + rb') \right] - b^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{2r\Delta}{b^2} \right). \quad (7.12)$$

Para fazer o mesmo tipo de relação do capítulo IV, vamos multiplicar a Equação (7.12) por  $2b$ ,

$$\frac{2b}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left[ \frac{1}{2br} \frac{d}{dr} (b + rb') \right] - 2b^3 = \frac{2b}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{2r\Delta}{b^2} \right). \quad (7.13)$$

Note que o termo no lado esquerdo da igualdade na Equação (7.13) já é conhecido do capítulo IV. Sabemos resolver esta equação numericamente quando o lado direito se anula. Devemos, portanto, procurar soluções desta equação contando com o termo de anisotropia do lado direito. Por meio de uma comparação direta com a equação (4.34), tomando  $a \rightarrow b$ , observe que a expressão acima se torna,

$$b'''' = 2b^3 - \frac{4b''''}{r} + \frac{2b''''b'}{b} + \frac{8b''b'}{rb} + \frac{b''^2}{b} - \frac{4b^3}{rb^2} - \frac{2b''b'^2}{b^2} + A, \quad (7.14)$$

onde  $A$ , o lado direito de (7.13), é o termo de anisotropia. Se  $A$  for igual a 0, voltamos ao caso da *Polítropa Quântica* (4.34). Desenvolvendo  $A$ , temos,

$$A = \frac{2b}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{2r\Delta}{b^2} \right) = \frac{4b}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r\Delta}{b^2} \right). \quad (7.15)$$

Resolvendo a derivada da equação acima, obtemos a seguinte expressão,

$$A = \frac{4b}{r^2} \left( \frac{\Delta}{b^2} + \frac{r\Delta'}{b^2} - \frac{2r\Delta b'}{b^3} \right). \quad (7.16)$$

Introduzindo o termo de anisotropia, adotamos  $\Delta = C f_{(r)} b^2 r^N$ , e aplicando essa quantidade em (7.16),

$$A = \frac{4b}{r^2} \left( C f_{(r)} r^N + \frac{r\Delta'}{b^2} - \frac{2rC f_{(r)} r^N b'}{b} \right). \quad (7.17)$$

Observe que  $\Delta' = C(f'_{(r)} b^2 r^N + 2f_{(r)} b b' r^N + f_{(r)} b^2 N r^{N-1})$ . Então a Equação (7.16) assume a forma,

$$A = \frac{4bC}{r^2} \left[ f_{(r)} r^N + \left( f'_{(r)} r^{N+1} + \frac{2f_{(r)} b' r^{N+1}}{b} + f_{(r)} N r^N \right) - \frac{2f_{(r)} r^{N+1} b'}{b} \right]. \quad (7.18)$$

Vamos agora mostra a equação completa inserindo (7.18) em (7.14), resultando em,

$$b'''' = 2b|b|^2 - \frac{4b''''}{r} + \frac{2b''''b'}{b} + \frac{8b''b'}{rb} + \frac{b''^2}{b} - \frac{4b^3}{rb^2} - \frac{2b''b'^2}{b^2} + \frac{4bC}{r^2} \left[ f_{(r)}r^N + \left( f'_{(r)}r^{N+1} + \frac{2f_{(r)}b'r^{N+1}}{b} + f_{(r)}Nr^N \right) - \frac{2f_{(r)}r^{N+1}b'}{b} \right]. \quad (7.19)$$

De fato, essa é a equação mais importante desse trabalho. Observe que é apresentada uma derivada de quarta ordem e não podemos resolvê-la analiticamente. Então, resolveremos esta equação numericamente e compararemos com as soluções obtidas na Ref. [10] onde não há anisotropia.

Ao resolver numericamente a equação (7.19), iremos considerar alguns casos especiais. Primeiro vamos considerar a abordagem feita por Bowers e Liang [39] e assumir  $C \leq 2/3$ . O valor  $C = 2/3$  será um caso limite. Em outra situação de interesse, vamos exigir que a anisotropia desapareça na origem quadraticamente, então podemos considerar  $N = 2$ . Por fim, podemos definir  $f_{(r)} = 0, 3$ , e notaremos que podemos mudar esses valores.

Para todos os casos, iremos assumir que  $b(r_0) = 1$ , pois a função de onda está normalizada na origem e a primeira derivada  $b'(r_0) = 0$ , pois esse é o caso padrão. Claramente esses parâmetros podem ser mudados e posteriormente veremos como as soluções de equilíbrio se comportam conforme isso acontece.

Para ilustrar nossos resultados, apresentaremos, a seguir, cinco figuras. Utilizaremos as legendas destas figuras para discutir seus resultados.

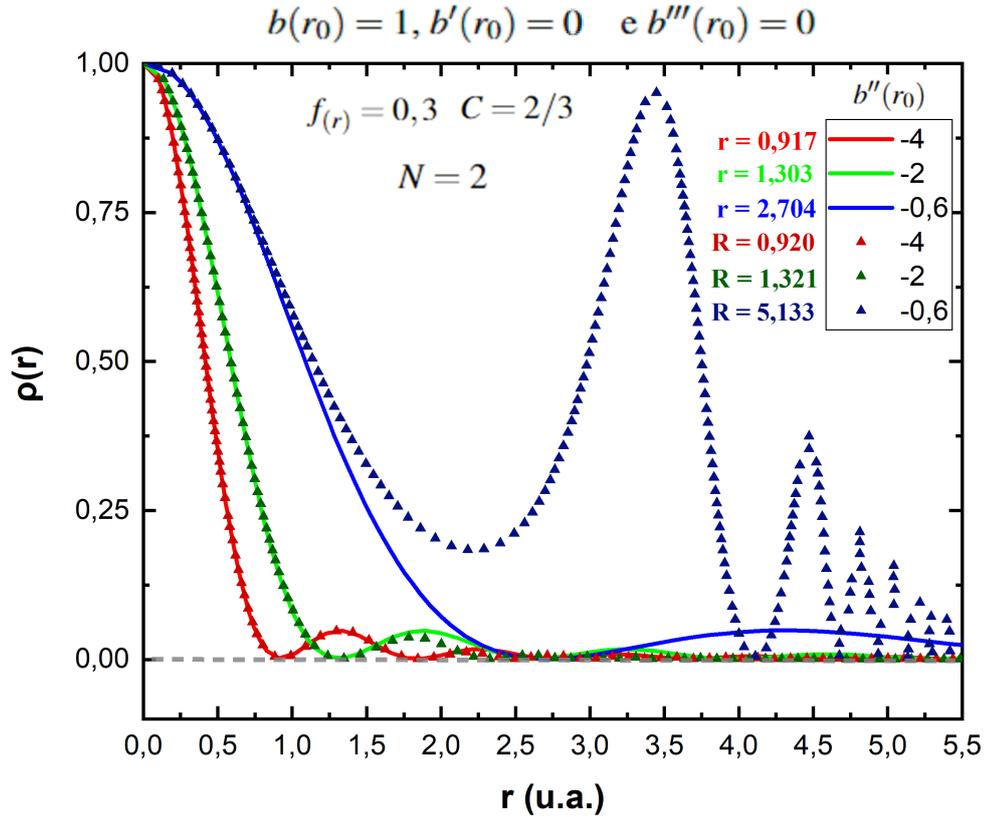
A Figura 7.1 mostra os perfis de densidades em função do raio para o caso da *Polítropa Quântica Anisotrópica*, comparados com os obtidos no capítulo IV para o caso da *Polítropa Quântica*. Os triângulos do gráfico representam o caso com efeitos de anisotropia e as linhas sólidas para o caso sem anisotropia.

Os gráficos da Figura 7.1 apresentarão curvas para diferentes valores de  $b''(r_0)$ . Lembrando que  $r_0$  é um termo muito próximo de zero (dentro do intervalo dos valores assumidos) e adotaremos para seu valor 0,01, como foi feito para o caso sem anisotropia. Fixamos o valor de  $b'''(r_0) = 0$  para todos os casos apresentados na Figura 7.1.

O procedimento a seguir é determinar a solução para  $b$ , ou seja, resolver a equação diferencial (7.19). Vamos notar que para um dos casos apresentados, a densidade  $\rho(r)$  assume um comportamento fora do comum. Os valores de  $r$ , para diferentes casos, denotam os raios das configurações politrópicas sem anisotropia, deixando claro que os efeitos de anisotropia acrescentam um certo grau de instabilidade no sistema, ou seja,  $R$  é sempre maior que  $r$ .

Para a Figura 7.2 vamos manter os mesmos valores para  $f_{(r)}$ ,  $N$  e  $C$ . No entanto, fixamos o valor de  $b''(r_0)$ , considerando diferentes valores para  $b'''(r_0)$ . Novamente, os triângulos representam o caso anisotrópico e as linhas sólidas para o caso isotrópico.

Vamos partir agora para algumas mudanças em relação à constante  $N$ . Então na Figura 7.3 podemos exigir  $N > 1$ , mesma abordagem feita por Herrera e Santos [14]. Percebemos que o

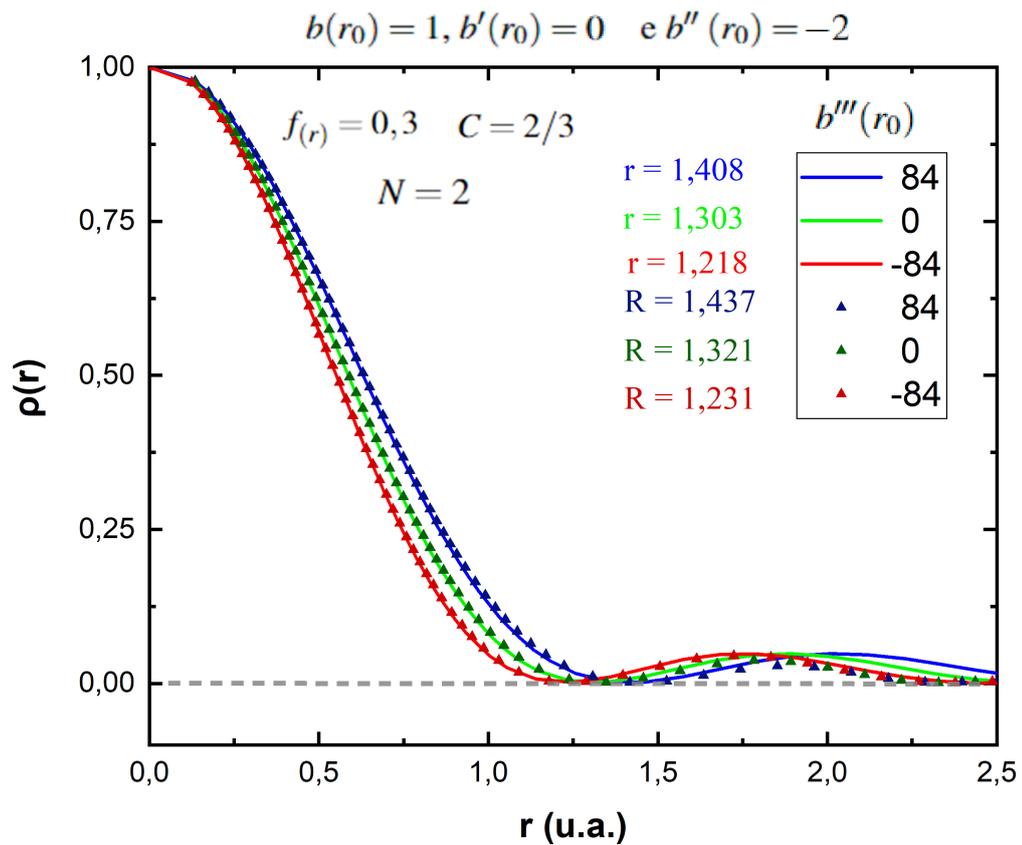


**Figura 7.1** Perfil de densidade  $\rho(r)$  com efeitos de anisotropia (triângulos), comparados com o caso isotrópico (linhas sólidas). Observe que o termo de anisotropia provocou pequenas mudanças para o raio do objeto em relação ao caso isotrópico, sendo que na linha dos triângulos azuis a densidade assume um comportamento que foge do padrão, pois ela oscila antes de chegar a zero.

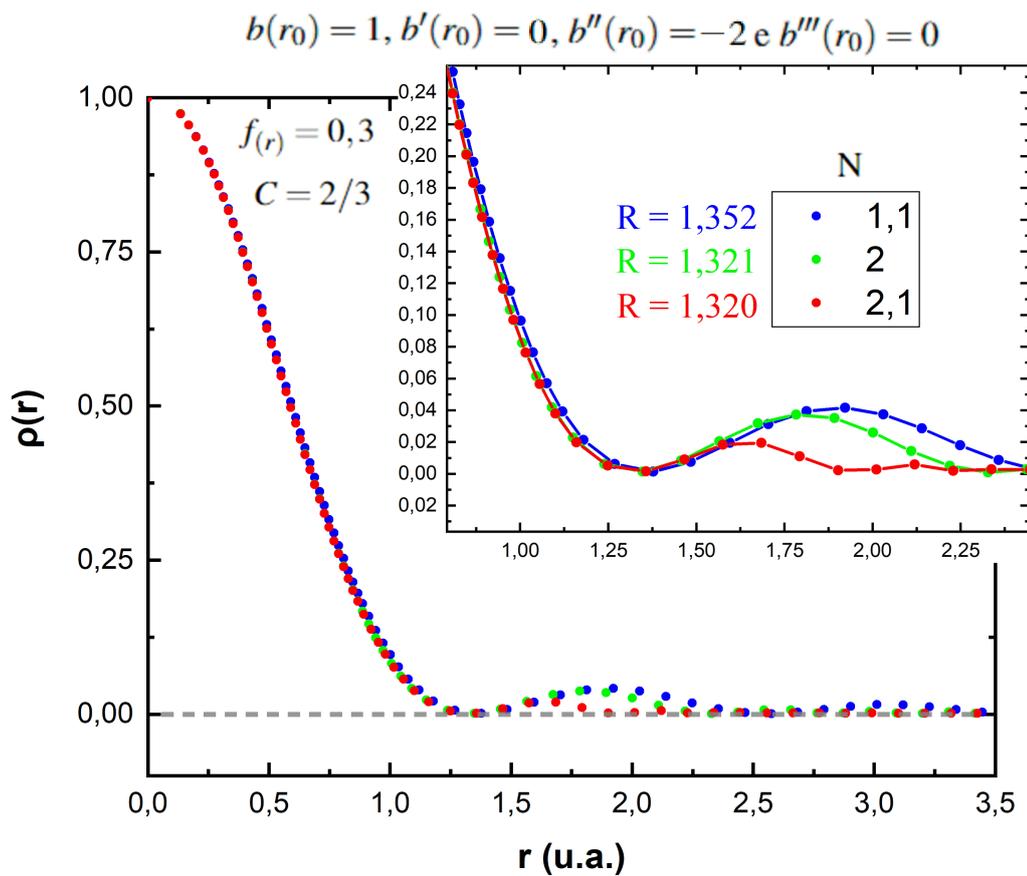
aumento em  $N$  causa uma diminuição do raio da estrutura.

Na Figura 7.4 serão apresentados alguns valores de  $C < 2/3$  (em um dos casos para  $C < 0$ ), e também para o valor principal adotado nesse trabalho, sendo o caso limite  $C = 2/3$ , conforme descrito na legenda da Figura 7.4.

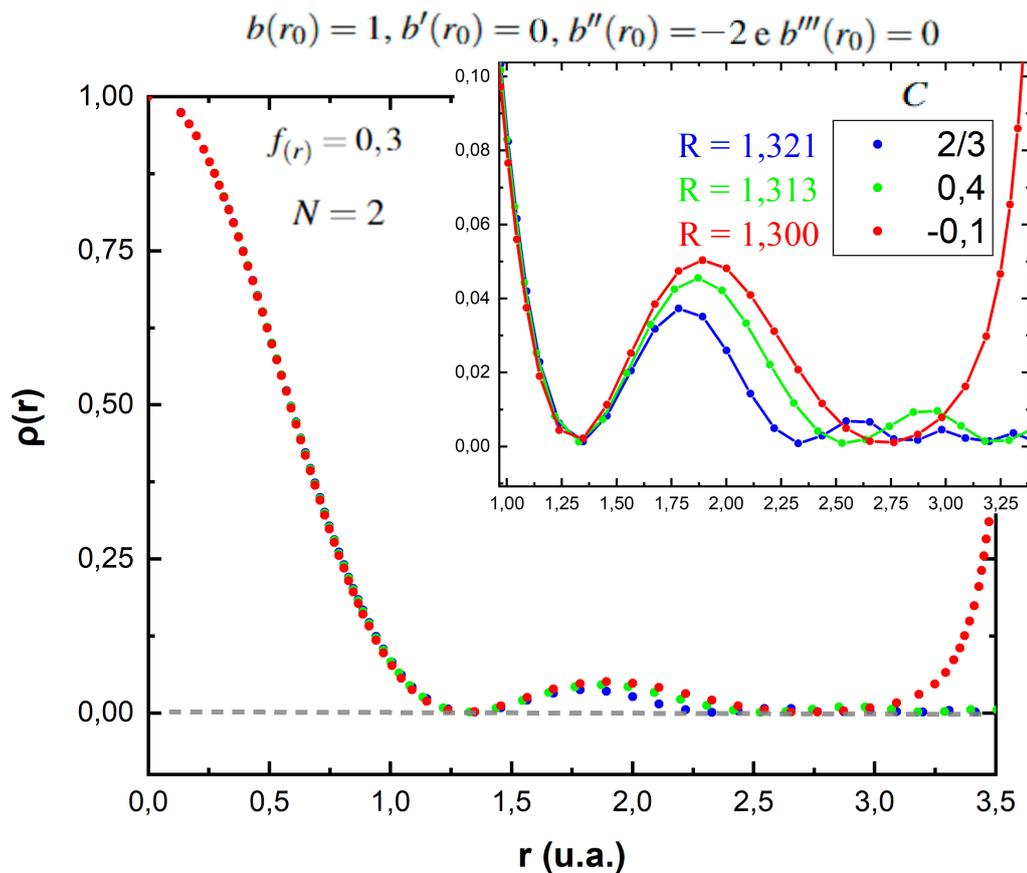
A discussão para algumas das soluções encontradas na literatura para  $f(r)$ , foi feita no capítulo anterior. Contudo, vamos considerar três diferentes valores para função  $f(r)$ . O caso em que  $f(r) = 0,3$  já foi considerado anteriormente. Podemos considerar agora  $f(r) = 0,9$  e também  $f(r) = 1,7$ . A Figura 7.5 vai nos apresentar todos esses casos considerados.



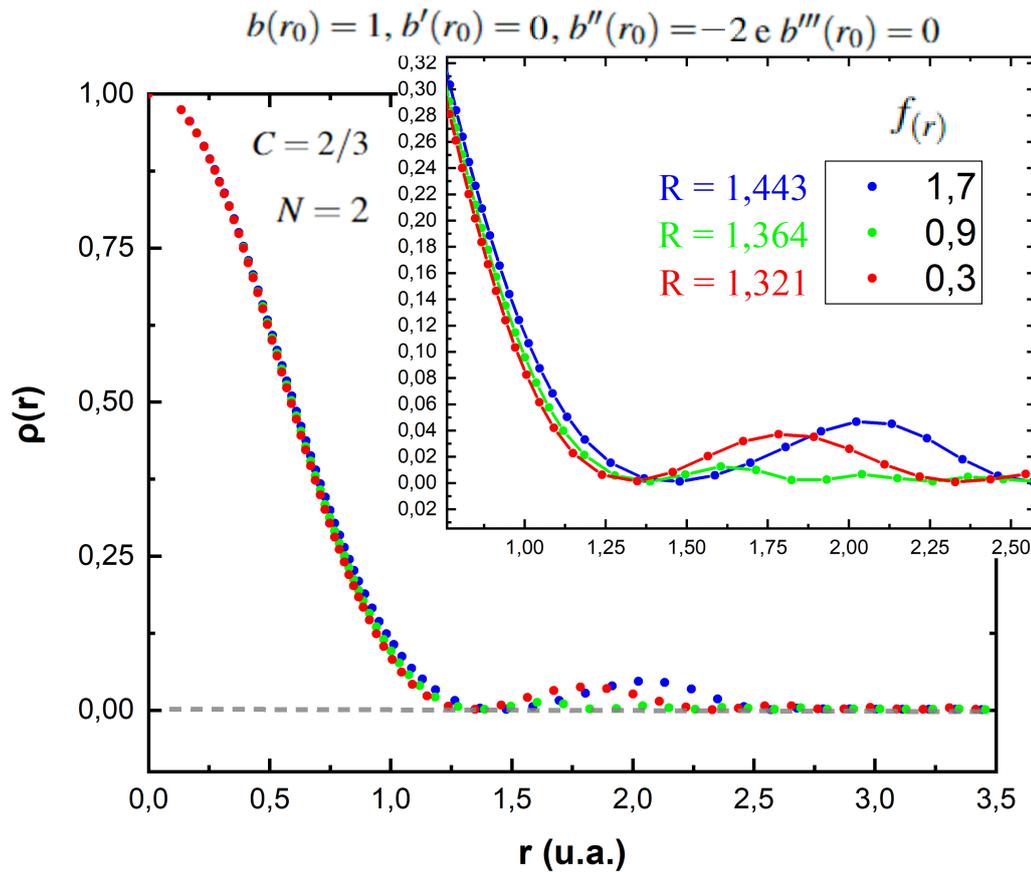
**Figura 7.2** Perfil de densidade  $\rho(r)$  com efeitos de anisotropia, para o mesmo parâmetro adotado na Figura 4.2 para diferentes valores de  $b'''(r_0)$ . Note que a medida em que  $b'''(r_0)$  vai diminuindo, o caso anisotrópico se torna cada vez mais parecido com o isotrópico. Para  $b'''(r_0) = 84$  o valor de  $R$  é cerca de 2% maior que  $r$ , para  $b'''(r_0) = 0$ ,  $R$  é cerca de 1,3% maior que  $r$  e para  $b'''(r_0) = -84$  o  $R$  é 1% maior que  $r$ .



**Figura 7.3** Polítropa Quântica Anisotrópica para diferentes valores de  $N > 1$ . Observe que próximo da origem, as linhas do gráfico para todos os valores de  $N$  assumidos, se confundem, note também que o raio  $R$  cresce com os valores de  $N$  mais próximo de 1. A diferença entre o menor raio  $R(N = 2, 1)$  e o maior raio  $R(N = 1, 1)$  é cerca de 2,3%. A grande diferença acontece após as densidades chegarem em zero, pois elas apresentam diferentes comportamentos.



**Figura 7.4** Nesse gráfico utilizamos a condição limite para  $C$ , os valores propostos por Bowers e Liang [39], onde  $C \leq 2/3$ . Note que para o caso em que  $C$  é negativo, a densidade chega a zero e sobe indefinidamente, evidenciando um comportamento fora do padrão. Outra informação importante é que no valor limite de  $C = 2/3$  o raio é maior se comparado com os outros valores assumidos, cerca de 1,5% se comparado com o menor raio  $R(C = -0,1)$ .



**Figura 7.5** Para o nosso modelo em questão, assumimos que  $f(r) = 0,3$ . A partir disso comparamos a nossa abordagem com outros valores da função  $f(r)$ . Note que para os três diferentes valores da função  $f(r)$ , os resultados são bem próximos, aparecendo uma certa diferença após a densidade  $\rho(r)$  chegar a zero. Isso deixa claro que assumir qualquer um desses três valores não haverá muitas alterações nessa estrutura, no que se refere ao decrescimento da densidade em função do raio. O raio para o caso  $f(r) = 1,7$  é cerca de 8,4% maior que o caso padrão em que  $f(r) = 0,3$ .

## Considerações Finais

Neste trabalho estudamos como adicionar anisotropia de pressão em sistemas politrópicos, mais precisamente em um objeto denominado de *Polítropa Quântica* estudado na Ref. [10]. Essa modificação, gerou um objeto novo que denotamos de *Polítropa Quântica Anisotrópica*. As configurações de equilíbrio deste objeto são fornecidas pela Equação (7.19) e, a partir desta equação, iniciamos seu estudo.

Os resultados obtidos para os perfis de densidade das configurações em equilíbrio mostram que, tanto no caso anisotrópico, assim como o caso isotrópico, o perfil de  $\rho(r)$  depende dos valores de suas derivadas segunda e terceira assumidas na origem. Em todas as análises adotamos uma normalização  $\rho(r_0) = 1$  e a primeira derivada  $\rho'(r_0) = 0$ .

Também observamos que a presença de anisotropia influencia o raio máximo da configuração e seu perfil de densidade  $\rho(r)$ .

Primeiro observamos que para os casos das figuras 7.1 e 7.2, os raios dos objetos anisotrópicos são maiores se comparados com o caso isotrópico. Notamos também que isso acontece para as densidades. No entanto, essa diferença entre as densidades (anisotrópica e isotrópica) é relativamente pequena e só pode ser observada após uma certa distância da origem, pois próximo da origem a anisotropia desaparece. Uma observação feita na figura 7.1 é que, deixando a segunda derivada menos negativa a parte anisotrópica passa a oscilar até  $\rho(r_0)$  chegar a zero definitivamente. Essa é uma configuração instável, que nos mostra que a anisotropia, a partir de uma determinada intensidade, traz problemas para a estabilidade do sistema.

Considerando os casos estudados nas figuras 7.3, 7.4 e 7.5, investigamos o impacto no perfil de  $\rho(r)$  para diferentes valores da constante  $N$ , a saber,  $N = 1, 1$  e  $N = 2, 1$ . Com o valor  $N = 2$  a anisotropia desaparecesse quadraticamente na origem. Para o caso do parâmetro que mede a magnitude da anisotropia  $C$ , nós adotamos a mesma condição feita por Bowers e Liang [39], onde  $C \leq 2/3$ . Adotamos a condição limite onde  $C = 2/3$  e consideramos esse valor para todas as figuras com efeitos de anisotropia. Por fim, consideramos diferentes valores para a função  $f(r)$ , e o resultado foi uma alteração de 8% maior para o raio da estrutura.

Nosso principal resultado é que o aumento da anisotropia fornece configurações instáveis para o sistema, ou seja, o perfil da densidade chega a zero, mas fica em uma constante oscilação, isso é mostrado na Figura 7.1. Essa condição não foi encontrada para o caso sem anisotropia da *Polítropa Quântica* [10].

## Bibliografia

- [1] STRUYVE. Ward. The De Broglie-Bohm pilot-wave interpretation of quantum theory. *arXiv preprint quant-ph/0506243*, 2005.
- [2] DIRAC. Paul Adrien Maurice. *The principles of quantum mechanics*. Number 27. Oxford university press, 1974.
- [3] BASSI. Angelo; GHIRARDI. GianCarlo. Dynamical reduction models. *Physics Reports*, 379(5-6):257–426, 2003.
- [4] BELL. John Stewart. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy*. Cambridge University Press, 2004.
- [5] NETO. Nelson Pinto. *Teorias e interpretações da mecânica quântica*. Editora Livraria da Física, 2010.
- [6] MADELUNG. Erwin. Quantum theory in hydrodynamical form. *z. Phys*, 40:332, v. 40, p. 322, 1927.
- [7] BOHM. David J.; HILEY. Basil J. The de broglie pilot wave theory and the further development of new insights arising out of it. *Foundations of Physics*, 12:1001–1016, 1982.
- [8] KIPPENHAHN. Rudolf; WEIGERT. Alfred; WEISS. Achim. *Stellar structure and evolution*, volume 192. 1990.
- [9] EBY. Joshua et al. Boson stars from self-interacting dark matter. *Journal of High Energy Physics*, 2016(2):1–19, 2016.
- [10] HEYL. Jeremy; CHOPTUIK. Matthew W.; SHINKARUK. David. Modified schrodinger-poisson equation: Quantum polytropes. *Physical Review D*, 96(10):103010, 2017.
- [11] LANE. Homer J. On the theoretical temperature of the sun, under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat, and depending on the laws of gases as known to terrestrial experiment. *American Journal of Science*, 2(148):57–74, 1870.

- [12] ABELLAN. G.; FUENMAY. E.; HERRERA. L. The double polytrope for anisotropic matter: Newtonian case. *Physics of the Dark Universe*, page 100549, 04 2020.
- [13] FABRIS; TONIATO; VELTEN. *Gravitação*, volume 1. Livraria da Física, 2021.
- [14] HERRERA. Luis; SANTOS. Nilton O. Local anisotropy in self-gravitating systems. *Physics Reports*, 286(2):53–130, 1997.
- [15] COLLINS. John C.; PERRY. Malcolm J. Superdense matter: neutrons or asymptotically free quarks? *Physical Review Letters*, 34(21):1353, 1975.
- [16] SAWYER. R. F.; SONI. A. Neutrino transport in pion-condensed neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 216:73–76, 1977.
- [17] BASSALO. José Maria Filardo et al. *Tópicos De Mecânica Quântica De De Broglie-Bohm*. Instituto de Física da USP, São Paulo, 2010.
- [18] DABIN. Rober. *De Broglie-Bohm Theory: A Hidden Variables Approach to Quantum Mechanics*. PhD thesis, Imperial College London, Department of Physics. 10 2009.
- [19] KHANDEKAR. Dinkar C.; LAWANDE S.V. Feynman path integrals: Some exact results and applications. *Physics Reports*, 137(2):115–229, 1986.
- [20] NASSAR. Antônio B. et al. Schwinger action principle, eikonal theory and two-time rotation-translation of coordinates. *Physica Scripta*, 42(1):9, v. 42, n. 1, p. 9, 1990.
- [21] FEYNMAN. Richard P.; HIBBS. Albert R.; STYER. Daniel F. *Quantum mechanics and path integrals*. Courier Corporation, 2010.
- [22] YONGYONG. CAI. Mathematical Theory and Numerical Methods for Gross-Pitaevskii Equations and Applications. Other thesis, 06 2011.
- [23] PITAEVSKII. Lev P. Vortex lines in an imperfect bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13(2):451–454, 1961.
- [24] GROSS. Eugene P. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *Journal of Mathematical Physics*, 4(2):195–207, 1963.
- [25] CHAVANIS. Pierre-Henri. Mass-radius relation of newtonian self-gravitating bose-einstein condensates with short-range interactions. i. analytical results. *Phys. Rev. D*, 84:043531, Aug 2011.

- [26] DALFOVO. Franco; GIORGINI. Stefano; PITAEVSKII. Lev P.; STRINGARI. Sandro. Theory of bose-einstein condensation in trapped gases. *Reviews of modern physics*, 71(3):463, 1999.
- [27] HORED. George Paul. *Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields*, pages 1–724. 01 2004.
- [28] CHAVANIS. Pierre-Henri; DELFINI. Luca. Mass-radius relation of newtonian self-gravitating bose-einstein condensates with short-range interactions. ii. numerical results. *Physical Review D*, 84(4):043532, 2011.
- [29] RUFFINI. Remo; BONAZZOLA. Silvano. Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Physical Review*, 187(5):1767, 1969.
- [30] MEMBRADO. M.; PACHECO. A. F.; SAÑUDO. J. Hartree solutions for the self-yukawian boson sphere. *Physical Review A*, 39(8):4207, 1989.
- [31] BOEHMER. C.G.; HARKO. T. Can dark matter be a bose–einstein condensate? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(06):025, 2007.
- [32] SAWYER. R. F.; SCALAPINO. D. J. Pion condensation in superdense nuclear matter. *Physical Review D*, 7(4):953, 1973.
- [33] JONES. P. B. The alignment of the crab pulsar magnetic axis. *Astrophysics and Space Science*, 33(1):215–230, 1975.
- [34] EASSON. Ian; PETHICK. C. J. Stress tensor of cosmic and laboratory type-ii superconductors. *Physical Review D*, 16(2):275, 1977.
- [35] ARNETT. W. David et al. Supernova 1987a. *Annual review of Astronomy and Astrophysics*, 27(1):629–700, 1989.
- [36] MIHALAS. Dimitri ; WEIBEL-MIHALAS. Barbara. *Foundations of radiation hydrodynamics*. Courier Corporation, 2013.
- [37] BARRETO. W.; ROJAS. S. An equation of state for radiating dissipative spheres in general relativity. *Astrophysics and space science*, 193(2):201–215, 1992.
- [38] JEANS. James; JEANS. James Hopwood. *An introduction to the kinetic theory of gases*. CUP Archive, 1982.
- [39] BOWERS. Richard L.; LIANG. E. P. T. Anisotropic spheres in general relativity. *The Astrophysical Journal*, 188:657, 1974.

- [40] CUDDEFORD. Phil; LOUIS Peter. Spherical galaxian distribution functions with adjustable anisotropy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 275(4):1017–1027, 1995.
- [41] MADSEN. Jes; EPSTEIN. Richard. Improved astronomical limits on the neutrino mass. *Physical review letters*, 54(25):2720, 1985.
- [42] BAYIN. Selçuk Ş. Anisotropic fluid spheres in general relativity. *Physical Review D*, 26(6):1262, 1982.
- [43] LANDAU. Lev Davidovich; LIFSHITZ. Evgenii Mikhailovich. *Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics, Volume 6*, volume 6. Elsevier, 2013.
- [44] COSENZA. M.; HERRERA. L.; ESCULPI. M.; WITTEN. L. Some models of anisotropic spheres in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 22(1):118–125, 1981.
- [45] CAMERON. A. G. W.; CANUTO. V. Neutron stars: general review. 1 1974.
- [46] LETELIER. Patricio S. Clouds of strings in general relativity. *Physical Review D*, 20(6):1294, 1979.
- [47] HERRERA. L.; BARRETO. W. Newtonian polytropes for anisotropic matter: General framework and applications. *Phys. Rev. D*, 87:087303, Apr 2013.
- [48] GOLDREICH. Peter; WEBER. Stephen V. Homologously collapsing stellar cores. *Astrophysical Journal*, 238(1):991–997, 1980.
- [49] KOVETZ. A. Slowly rotating polytropes. *The Astrophysical Journal*, 154:999, 1968.
- [50] TOLMAN. Richard C. Effect of inhomogeneity on cosmological models. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 20(3):169–176, 1934.
- [51] OPPENHEIMER. J. Robert; VOLKOFF. George M. On massive neutron cores. *Physical Review*, 55(4):374, 1939.
- [52] BLUDMAN. S. A. Stability of general-relativistic polytropes. *The Astrophysical Journal*, 183:637–648, 1973.
- [53] COSENZA. M.; HERRERA. L.; ESCULPI. M.; WITTEN. L. Evolution of radiating anisotropic spheres in general relativity. *Physical Review D*, 25(10):2527, 1982.
- [54] FLORIDIS. Petros S. A new interior schwarzschild solution. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 337(1611):529–535, 1974.

- [55] DI PRISCO. Alicia; HERRERA. Luis; VARELA. Victor. Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy. *General Relativity and Gravitation*, 29(10):1239–1256, 1997.
- [56] BOCQUET. M.; BONAZZOLA. S.; GOURGOULHON. E.; NOVAK. J. Rotating neutron star models with magnetic field. *Arxiv preprint gr-qc/9503044*, 1995.
- [57] JAMES. Binney; SCOTT. Tremaine. Galactic dynamics. *Princeton Series in Astrophysics (Princeton University Press, Princeton, 1998)*, 2008.

